ELABORACIÓN DE MATERIALES PARA CONOCIMIENTO DE MATEMÁTICAS II

Departamento de Matemáticas
del IES Adaja de Arévalo

IES ADAJA

ÍNDICE:

UNIDAD DIDÁTICA 1 y 2: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD. ENTEROS

FICHA 1: Números naturales

Para leer o escribir números con varios dígitos en el sistema decimal de numeración, se deben hacer agrupamientos de tres en tres cifras, de derecha a izquierda.

CLASE	**Billones**						**Millones**						**Millares**					
Número											**1**	**5**	**0**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**
										4	**0**	**0**	**5**	**7**	**0**	**7**	**1**	**2**
								5	**1**	**2**	**2**	**0**	**7**	**9**	**2**	**7**	**0**	**0**
						7	**5**	**0**	**0**	**4**	**0**	**1**	**6**	**4**	**4**	**7**	**9**	**2**
			5	**2**	**0**	**0**	**4**	**6**	**6**	**3**	**1**	**0**	**0**	**4**	**0**	**4**	**5**	**7**
	1	**1**	**7**	**1**	**5**	**1**	**0**	**0**	**0**	**8**	**6**	**9**	**0**	**0**	**0**	**4**	**4**	**1**
Nombre del orden	**Centena de millar**	**Decena de millar**	**Unidad de millar**	**Centena**	**Decena**	**Unidad**	**Centena de millar**	**Decena de millar**	**Unidad de millar**	**Centena**	**Decena**	**Unidad**	**Centena de millar**	**Decena de millar**	**Unidad de millar**	**Centena**	**Decena**	**Unidad**

1. Escribe cómo se leen los números que están en el cuadro anterior:

a) 1.775.001	→
b) 37.852104	→
c) 63.205312	→
d) 22.145.066	→
e) 5.320.645.888	→
f) 524.006.898.441	→

2. Escribe con cifras los siguientes números prestando atención a los ceros intermedios:

Siete mil trescientos cuarenta	→
Seis millones, cuatrocientos veinte mil	→
Doce millones trescientos cuarenta y tres mil	→
Ciento cincuenta y dos mil millones treinta y dos mil doscientos siete	→

3. Ordena los números utilizando los signos < , >, de mayor a menor los siguientes números:

3.030, 3.300, 33.000, 3.003, 30.300, 3.303

4. Realiza las siguientes operaciones:

12.021 + 1.017 + 53 =	310.107 + 98.704 + 409 =	23.444 + 38.003 + 659 +136 + 1 =

17.809 + (182.603 – 175.518) =	(403.002 – 86.772) + 8.237 =
25’03 – (55’2 – 33’625) =	86’803 – (9’405’+ 37’762) =

5. Realiza las siguientes operaciones:

8.574 x 43 =	7.802 x 32 =	9.407 x 605

4.563: 45 =	56.757 : 62 =	44.559 : 237 =

6. Calcula el valor de las siguientes operaciones combinadas:

a) 28 · 4 : 2 - 16 : 8 · 9 =
b) 17 - 3 · 5 + 24 : 6 · 8 =
c) (32 - 18) : (2 · 7) =
d) 45 : (5 + 4) + 2 · (36 : 9 - 2) =

e) $15 \cdot (18 : 6) - 24 : 3 + 1 =$

f) $25 + 60 : 3 - 6 \cdot (3 + 11) : 7 + 3 : (2 - 1) =$

g) $5 \cdot (7- 3 + 14 -10) (5 + 3) : 2 =$

h) $32 - 10 \cdot 3 + 16 : (10 - 2) =$

i) $27 : (17 - 2 \cdot 4) – 1 =$

j) $24 : (12 - 54 : 9) + 3 \cdot (15 - 12 : 3) + 5- 4 : 2 =$

k) $98 - 38 : 19 + 4 \cdot 6 : 3 - 2 \cdot (56 : 7 + 2) =$

UNIDAD DIDÁTICA 1 y 2: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD. ENTEROS

FICHA 2: Divisibilidad

El número b es <u>divisor</u> del número a si la división $a:b$ es exacta.

<u>Ejemplos:</u>

2 es divisor de 8 porque 8 : 2 = 4

9 es divisor de 18 porque 18 : 9 =2

8 es divisor de 80 porque 80 : 8 = 10

Los divisores de un número son finitos.

<u>Ejemplo:</u> D(10) = {1, 2, 5, 10}

1. Escribe todos los divisores de:

- **a.** D(12) =
- **b.** D(25) =
- **c.** D(40) =
- **d.** D(54) =
- **e.** D(77) =

2. ¿Cuáles son los divisores comunes de 12 y 18?

- **a.** D(12) =
- **b.** D(18) =

3. Responde a las siguientes preguntas razonando la respuesta.

a. ¿Es 5 divisor de 75?	**b.** ¿Es 4 divisor de 26?	**c.** ¿Es 7 divisor de 371?

4. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

- **a.** 4 es divisor de 62
- **b.** 24 es múltiplo de 6 y de 8
- **c.** 35 no es múltiplo de 5
- **d.** 7 es divisor de 112

REPASO: Criterios de divisibilidad

- **Un número es divisible entre 2 (es múltiplo de 2) si termina en cifra par: 0, 2, 4, 6, 8.**
- **Un número es divisible entre 3 (es múltiplo de 3) si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.**
- **Un número es divisible entre 5 (es múltiplo de 5) si termina en 0 o en 5.**
- **Un número es divisible entre 11 (es múltiplo de 11) si la suma de las cifras de lugar par menos la suma de las cifras de lugar impar es 0 o un múltiplo de 11.**

5. Aplica los criterios de divisibilidad para rellenar la siguiente tabla:

DIVISIBLE ENTRE	2	3	5	11
375				
990				
1848				
12300				
14240				

6. Descompón en factores primos los siguientes números:

72 =	36 =	232 =	100 =	294 =
540 =	888 =	900 =	2.205 =	3.850 =

REPASO:

El <u>mínimo común múltiplo</u> de varios números es el menor de sus múltiplos comunes distintos de cero.

De forma abreviada se escribe <u>m.c.m.</u>

REGLA PRÁCTICA PARA CALCULAR EL M.C.M.:

Descomponemos en factores primos cada número.

El mínimo común múltiplo es igual al producto de los factores primos, comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

7. Halla el mínimo común múltiplo de los números que se indican:

24 y 32	14 y 21
9, 12 y 18	27, 36 y 63
10, 100 y 50	33, 77 y 121

REPASO: El máximo común divisor de varios números es el mayor de sus divisores comunes. De forma abreviada se escribe m.c.d.

REGLA PRÁCTICA PARA CALCULAR EL M.C.D.:

Descomponemos en factores primos cada número.

El máximo común divisor es igual al producto de los factores primos comunes, elevados al menor exponente.

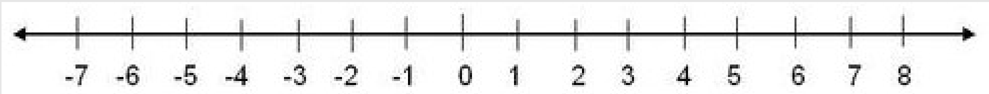
8. Halla el máximo común divisor de los números que se indican:

24 y 32	14 y 21
20, 35 y 45	4, 10 y 20
10, 15 y 25	300, 360 y 420

UNIDAD DIDÁCTICA 1 y 2: NÚMEROS NATURALES. DIVISIBILIDAD. ENTEROS

FICHA 3: Números enteros.

<u>El conjunto Z de los números enteros</u> está formado por el cero "0", los números naturales (1, 2, 3, 4, …), y sus opuestos (– 1, – 2, – 3, – 4, …)



<u>El valor absoluto de un número</u> es el número que resulta al quitarle el signo:

|+ a| = a |– a| = a

<u>El opuesto de un número entero</u> es otro número entero con el mismo valor absoluto pero de signo contrario:

El opuesto de (– 3) → +3 El opuesto de (+5) → – 5

<u>Ordenación de números enteros:</u>

- **Todo número negativo es menor que cero: − 5 < 0**
- **Todo número positivo es mayor que cero: 5 > 0**

1. Completa:

|– 6| = |+6| = |– 2| =

|+9| = |– 11| = |+10| =

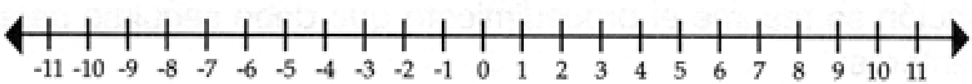
2. Completa:

a) Opuesto de (– 11) = b) Opuesto de (+16) =

c) Opuesto de(+12) = d) Opuest6o de (– 21) =

3. Representa en la recta y ordena de mayor a menor:

– 7, +4, – 1, +7, +6, – 4, – 5, +3, – 11



4. Ordena de menor a mayor:

a. +5, – 3, – 7, 0, 1, +6, – 12, – 5

b. – 6, – 3, – 9, 0 , – 1, – 5, – 12, – 4, 3

5. Realiza las siguientes operaciones:

a. $3 \cdot [\, 8 + 1 - (\, 14 - 8\,)\,] + (\, 10 - 2\,) - (\, 35 + 14\,) : 7 =$

b. $[\,(\, 5 - 1\,) : (\, 7 - 1 - 7)\,] - (\, 3 - 5\,) : (\, 7 - 9\,) =$

c. $2 - [\, 3 - (\, 2 - 5\,) \cdot 3 + 2 \cdot (\, 1 - 3\,) \cdot (\, -2\,)\,] + 5 =$

d. $4 - 5 \cdot \{\, 2 - 3 \cdot [\, -4 + 2 \cdot (\, 5 - 4\,) \cdot (\, -1\,)\,] \cdot (\, -1\,)\,\} \cdot (\, -1\,) =$

e. $8 - [\,4 + (\,2 - 5\,) \cdot 2 - 6 \cdot 3 + (\,6 - 2\,)] \cdot (\,-1\,) + 5 \cdot (\,-3 - 2\,) =$

f. $1 - \{\,2 - [\,3 \cdot (\,4 - 5\,) \cdot 2 - 3\,] \cdot 2\,\} \cdot (\,-2\,) =$

g. $2 \cdot \{\,2 \cdot [\,-2 \cdot (\,-5 + 4\,) \cdot 2\,] + 1\,\} \cdot (\,-2\,) =$

h. $6 - 4 \cdot [\,3 - (\,-1 - 2\,) - 3 \cdot 2 \cdot (\,-2\,) \cdot 4\,] + (-1) \cdot \{\,5 - [\,(\,-1 + 4\,) : 3 + 7 \cdot (\,-2\,)\,]\,\} =$

REPASO: Potencia de un número entero.

Al elevar un número negativo a una potencia:

- **Si el exponente es par, el resultado es positivo:** $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
- **Si el exponente es impar, el resultado es negativo:** $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

IMPORTANTE: No debes confundir estas expresiones: $(-3)^2$ **y** -3^2 **pues:**

- $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$
- $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

REPASO: La raíz de un número negativo dependerá de la paridad del índice. Así:

- **Si el índice es impar, la raíz existe:** $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-3125} = -5$
- **Si el índice es par, la raíz no existe:** $\sqrt{-9}$ **no existe**

6. Escribe como una única potencia:

a. $(-2)^5 \cdot (+5)^5 =$

b. $(+4)^3 \cdot (-5)^3 =$

c. $(-6)^4 : (+3)^4 =$

d. $(-5)^{11} : (+5)^{11} =$

e. $(-15)^4 : (-5)^4 =$

f. $(-2)^2 \cdot (-2)^3 =$

g. $(+3)^3 \cdot (+3) =$

h. $(-6)^9 : (-6)^7 =$

i. $(-5)^{14} : (-5)^{11} =$

j. $[(-6)^8 : (-6)^4] : (-3)^4 =$

k. $[(-2)^2 \cdot (-2)^4] : (-2)^6 =$

l. $(-3)^4 : [(-15)^6 : (--5)^2] =$

7. Calcula, si existe:

a. $\sqrt{(+1)} =$

b. $\sqrt{(-1)} =$

c. $\sqrt{(+4)} =$

d. $\sqrt{(-4)} =$

e. $\sqrt{(+36)} =$

f. $\sqrt{(-49)} =$

g. $\sqrt{(+64)} =$

h. $\sqrt{(-81)} =$

i. $\sqrt{(+100)} =$

UNIDAD DIDÁCTICA 3: NÚMEROS DECIMALES

FICHA 1: Los números decimales

Centenas	Decenas	Unidades ,	Décima	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
C	**D**	**U ,**	**d**	**c**	**m**	**dm**
1	**8**	**6 ,**	**1**	**0**	**7**	**5**
	5	**2 ,**	**2**	**1**	**0**	**2**
		7 ,	**0**	**2**		

186,1075: ciento ochenta y seis unidades, mil setenta y cinco diezmilésimas

52,2102: cincuenta y dos unidades, dos mil ciento dos diezmilésimas

7,02: siete unidades y dos centésimas

1. **Completa el siguiente cuadro:**

	Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima
12’08						
0’125						
25’19						
5’028						
6’7						

2. **Escribe con cifras las siguientes cantidades:**

Dos unidades y 8 centésimas →

Doce unidades y 18 milésimas →

Cincuenta y tres diezmilésimas →

Quinientas seis unidades y veintiuna centésimas →

Setenta y una unidades, veintidós milésimas →

Treinta y dos unidades y tres décimas →

Siete centésimas →

3. **Escribe cómo se leen las siguientes cantidades:**

15’024 →

45’2 →

0’025 →

15’26 →

0’235 →

21’021 →

$$\text{Números decimales}:\begin{cases}\text{Racionales (se pueden escribir como fracción)}\begin{cases}\text{EXACTOS}\\\text{PERIÓDICOS}\end{cases}\\\text{Irracionales (no se pueden escribir como fracción)}\end{cases}$$

Descripción:

- **<u>Decimal exacto</u>: son los que tienen un número finito de cifras decimales.**
  Ejemplo: 3’442.
- **<u>Decimal periódico</u>: Tiene un número infinito de cifras decimales pero con una estructura periódica, que se repite infinitamente, denominada periodo. Se clasifican a la vez en:**
  - **<u>Periódico Puro</u>: Toda la parte decimal forma parte del periodo.**

    Ejemplo: 3,141414141… = $3'\overline{14}$ **es periódico puro. Su periodo es 14.**
  - **<u>Periódico Mixto</u>: Una parte de la parte decimal no está en el periodo. A esta parte se la llama “anteperíodo”.**

    Ejemplo, 7’32571571571…v= $7'32\overline{571}$ **es periódico mixto. Su anteperíodo es 32 y su periodo es 571.**
- **<u>Decimal no periódico con infinitas cifras decimales</u>: son los que tienen infinitos decimales sin ninguna estructura periódica.**

  Ejemplo: $\sqrt{2} = 1'41421356...$

4. Clasifica los siguientes números decimales:

	RACIONALES			IRRACIONALES
	DECIMALES EXACTOS	DECIMALES PERIÓDICOS		
		PUROS	MIXTOS	
3’71				
0’0525252…				
1’001001001…				
$\sqrt{3}$				
5’407				
π				
4’12525252…				
12’17				

$\sqrt{7}$				
3’01				
3’2121121112…				
8’7644444…				
5’99				
1’1424242…				
0’999999…				

¡OJO! El último tiene truco…

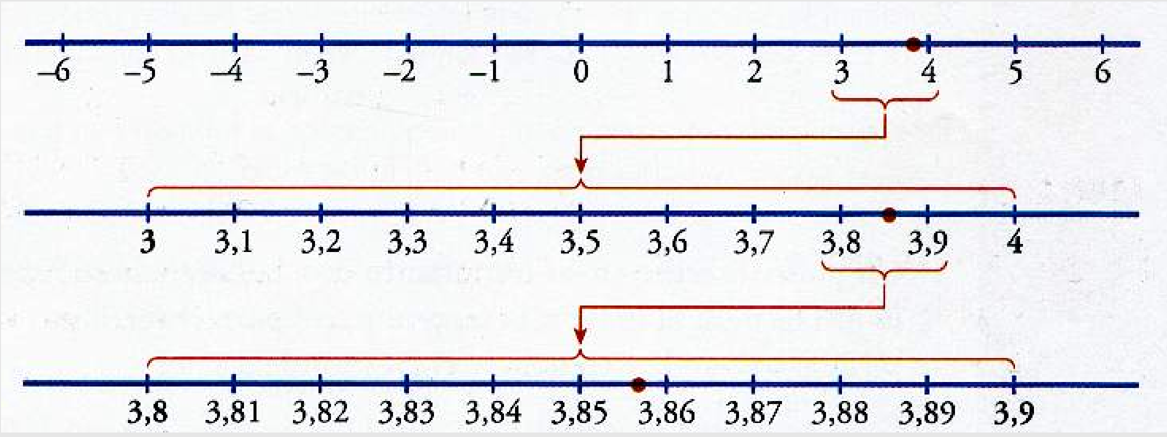
5. Expresa en forma decimal las siguientes fracciones, indicando de qué tipo es el número obtenido:

$\frac{18}{5} =$ $\frac{13}{9} =$ $\frac{23}{15} =$ $\frac{10}{27} =$

$\frac{5}{7} =$ $\frac{35}{6} =$ $\frac{441}{63} =$ $\frac{23}{11} =$

$\frac{28}{56} =$ $\frac{13}{12} =$ $\frac{50}{7} =$ $\frac{2}{3} =$

Debemos tener en cuenta una propiedad muy importante de los números decimales: Siempre, entre dos números decimales, hay infinitos números decimales:



6. Escribe tres números entre cada casilla:

2’3	<	<	<	< 2’4	0’57	<	<	<	< 0’58
6’1	<	<	<	< 2’2	1’25	<	<	<	< 1’26
8’02	<	<	<	< 8’03	5’7	<	<	<	< 5’71

7. Ordena de menos a mayor: 0’01, 0’008, 0’0098, 0’011, 0’015

8. Ordena de menor a mayor: 21’09, 21’1, 21’7, 21’65, 21’06, 21’20, 21’649

9. Ordena de menor a mayor: -5’21, -5’09, 5’04, 5’51, -5’088, 5’409, 5’6

UNIDAD DIDÁCTICA 3: NÚMEROS DECIMALES

FICHA 2: Fracción generatriz

Hemos dicho que, tanto los decimales exactos como los periódicos, son números racionales, esto es, se pueden expresar en forma de fracción. Pues bien, la fracción de la cual "procede" un número decimal es su <u>fracción generatriz</u> (genera el número decimal).

Para calcular la fracción generatriz, procedemos de la siguiente forma:

- **Si es un número decimal exacto:**

$$FG = \frac{\text{Nº completo}}{\text{La unidad seguida de tantos "0" como cifras decimales hay}}$$

Ejemplo: $3'71 = \frac{371}{100}$

- **Si es un número periódico:**

$$FG = \frac{\text{Nº completo} - \text{Parte que no está en el periodo}}{\text{Tantos "9" como cifras hay en el periodo y tantos "0" como cifras hay en el anteperiodo}}$$

Ejemplos: $3'717171..1 = \frac{371-3}{99} = \frac{368}{99}$ $\quad 2'425252525... = \frac{2425-24}{990} = \frac{2421}{990}$

1. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

4'83 =	0'221 =	74'056 =
98'12 =	467'4 =	86'741 =
125'56 =	0'521 =	7'772 =
1'95 =	10'022 =	0'5662 =

2. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros:

$4'\overline{83} =$	$0'\overline{221} =$	$74'\overline{056} =$
$98'\overline{12} =$	$467'\overline{4} =$	$86'\overline{741} =$
$125'\overline{56} =$	$0'\overline{521} =$	$7'\overline{772} =$
$1'\overline{95} =$	$10'\overline{022} =$	$0'\overline{5662} =$

3. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:

$4'8\overline{3} =$	$0'2\overline{21} =$	$74'0\overline{56} =$
$98'1\overline{2} =$	$467'14\overline{74} =$	$86'74\overline{1} =$
$3'07\overline{05} =$	$125'5\overline{6} =$	$0'5\overline{21} =$
$1'9\overline{5} =$	$10'02\overline{2} =$	$0'5\overline{662} =$

4. Halla la fracción generatriz de los siguientes números:

$5'25 =$	$3'\overline{54} =$	$3'5\overline{4} =$
$25'\overline{7} =$	$1'\overline{053} =$	$0'1\,1\overline{6} =$
$7'471 =$	$2'\overline{08} =$	$65'81 =$
$14'1\overline{56} =$	$13'88\overline{65} =$	$5'021 =$
$65'\overline{81} =$	$7'47\overline{2} =$	$0'\overline{9} =$

5. Relaciona cada número decimal con su fracción generatriz:

$3'5$	$15'\overline{24}$	$110'\overline{914}$	$3'\overline{5}$	$12'4\overline{15}$	$26'13\overline{8}$
$\dfrac{32}{9}$	$\dfrac{23525}{900}$	$\dfrac{4097}{330}$	$\dfrac{10904}{999}$	$\dfrac{35}{10}$	$\dfrac{503}{33}$

UNIDAD DIDÁCTICA 3: NÚMEROS DECIMALES

FICHA 3: Sumas y restas de números decimales

1. Realiza las siguientes operaciones de números decimales:

57'451 + 41’62 = 19’2 + 6’226 = 26’9 – 21’174 = 11'95 – 13'5 =

241'9 + 81'052 + 49'07 = 33’74 + 11’551 + 14’5 =

97’05 – (12’912 + 5’483 – 5’58) = 45’06 – (1’85 – 7’312 + 1’505) =

2. Jorge tiene 60’12 Euros. Se gasta en merendar con los amigos 9’30 Euros y en comprarse ropa de deporte 31’25 euros.

a. ¿Cuánto dinero se gasta?

b. ¿Con cuánto dinero vuelve a casa?

UNIDAD DIDÁCTICA 3: NÚMEROS DECIMALES

FICHA 4: Multiplicación y división de números decimales

1. Calcula las siguientes multiplicaciones por la unidad seguida de ceros:

3’21 · 10 =	0’43 · 100 =	41’03 · 100 =
7’02 · 10 =	0’227 · 10 =	22’2 · 1000 =
31’21 · 100 =	0’57 · 1000 =	7’016 · 10000 =
13’71 · 10 =	0’13 · 100 =	0’008 · 10 =
0’12 · 100 =	6’54 · 1000 =	4’56 · 100 =

2. Calcula:

542’7 · 2’23 = 705’3 · 6’5 = 5’277 · 22,5 = 13'81 · 4,31 =

3. Un kilo de pescado fresco cuesta 5’73 euros ¿Cuánto costará 3’25 Kg de pescado?

4. Un paquete de galleta s pesa 0,8 Kg. En una caja caben 73 paquetes ¿cuál será el peso en gramos de 14,5 cajas?

5. Juan tiene en la nevera 8 latas de refresco de 0’33 l cada una. ¿De qué cantidad de refresco dispone?

6. Una señora compra 6 latas de zumo a 0’80 € cada lata; 8 latas de refresco a 0’55 € cada lata y 3 paquetes de galletas a 1’53 € cada paquete. ¿A cuánto ascendió la compra total?

7. Calcula las siguientes divisiones hasta obtener de resto 0:

42’7 : 5	87’5 : 7	16’89 : 3	36’45 : 9
327 : 5’2	87’5 : 7’03	1689 : 3’7	36’45 : 9’4
32’4 : 6’52	7’15 : 5’4	17’8 : 0’27	937’8 : 3’41

8. Calcula las siguientes divisiones por la unidad seguida de ceros:

3’21 **:** 10 = 0’43 **:** 100 = 41’03 **:** 100 =

7’02 : 10 =	0’227 : 10 =	22’2 **:** 1000 =
31’21 **:** 100 =	0’57 : 1000 =	7’016 **:** 10000 =
13’71 **:** 10 =	0’13 **:** 100 =	0’008 **:** 10 =

9. Una persona paga de agua cada 2 meses 13’66 euros. ¿Cuánto paga al mes? ¿Y semanalmente?

10. ¿Cuántos vasos de 33 cl se podrán llenar con 11 botellas de leche de 1’5 l? ¿Cuánto sobrará?

11. La longitud de ciertos palos de madera es de 12’35 cm. Si disponemos de 3779’1 cm ¿Cuántos palos de madera podremos fabricar? ¿Y si queremos que los palos midan 8’5 cm?

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 1: Fracciones equivalentes, simplificación y amplificación de fracciones

Dos fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ son equivalentes, y lo escribimos como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si se cumple que a · d = b · c

Ejemplo: $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ son equivalentes ya que 3·10=5·6

<u>Amplificar fracciones</u> consiste en multiplicar el numerador y denominador por el mismo número distinto de cero $\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{8}{12}$

<u>Simplificar fracciones</u> consiste en dividir el numerador y denominador entre un divisor común $\frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$, y las dos fracciones son equivalentes

1. Averigua si son equivalentes los siguientes pares de fracciones:

a. $\frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

b. $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$

c. $\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$

d. $\frac{11}{132} = \frac{12}{144}$

e. $\frac{6}{9} = \frac{3}{2}$

f. $\frac{6}{13} = \frac{2}{4}$

2. Averigua el valor de X en cada par de fracciones para que sean equivalentes:

a. $\frac{5}{9} = \frac{x}{45}$

b. $\frac{60}{10} = \frac{12}{x}$

c. $\frac{5}{16} = \frac{x}{48}$

d. $\frac{12}{34} = \frac{660}{x}$

3. Calcula dos fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a. $\frac{2}{7} =$

b. $\frac{1}{5} =$

c. $\frac{11}{6} =$

4. Escribe dos fracciones ampliadas de las siguientes fracciones:

a. $\frac{1}{4} =$

b. $\frac{9}{5} =$

c. $\frac{7}{12} =$

5. Escribe dos fracciones equivalentes por simplificación

a. $\frac{6}{21} =$

b. $\frac{7}{35} =$

c. $\frac{24}{32} =$

d. $\frac{40}{72} =$

e. $\frac{50}{75} =$

f. $\frac{72}{120} =$

g. $\frac{140}{320} =$

h. $\frac{168}{588} =$

i. $\frac{312}{468} =$

j. $\frac{425}{850} =$

k. $\frac{648}{720} =$

l. $\frac{450}{650} =$

m. $\frac{465}{744} =$

n. $\frac{480}{320} =$

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 2: Reducción de fracciones a común denominador.

<u>Reducir fracciones a común denominador</u> consiste en obtener otras fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador. Para ello, calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo: Reduce a común denominador las siguientes fracciones: $\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{18}$.

Calculamos el m.c.m. (4,18) = $2^2 \cdot 3^2$ = 36.

$4 = 2^2$; $18 = 2 \cdot 3^2$

Y por último, calculamos los numeradores:

$$\frac{5}{4} = \frac{x}{36} \quad x = \frac{36}{4} \cdot 5 = 45 \quad \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{45}{36}$$

$$\frac{7}{18} = \frac{x}{36} \quad x = \frac{36}{18} \cdot 2 = 14 \quad \Rightarrow \frac{7}{18} = \frac{14}{36}$$

1. Reduce a común denominador.

a. $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ (denominador común 6)

b. $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ (denominador común 10)

c. $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$ (denominador común 15)

d. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (denominador común 12)

2. Reduce a común denominador las siguientes fracciones:

a. $\frac{3}{4} y \frac{6}{5}$

b. $\frac{3}{5} y \frac{4}{10}$

c. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} y \frac{1}{8}$

d. $\frac{4}{3}, \frac{1}{4} y \frac{5}{6}$

3. Ordena las siguientes fracciones de mayor a menor:

a. $\frac{27}{18}, \frac{31}{36}, \frac{5}{3} \, y \, \frac{13}{9}$

b. $\frac{18}{5}, \frac{21}{4}, \frac{25}{6}, \frac{7}{2}$

4. Cuatro mensajeros se han repartido un cierto número de paquetes para entregar .David se ha encargado de $\frac{1}{3}$ de los paquetes, Ángela de $\frac{5}{25}$, Lucía de $\frac{3}{10}$ y Miguel de $\frac{2}{12}$.

a. Ordena de mayor a menor la cantidad de paquetes entregados

b. ¿Quién ha repartido más paquetes?¿ Y quién menos?

5. Se van a comprar tiras de madera del mismo largo para hacer tres marcos de puerta. El primer marco requiere $\frac{5}{6}$ de la tira, el segundo $\frac{5}{4}$ y el tercero $\frac{11}{8}$ de la tira. ¿Cuál de los tres marcos necesita más madera?

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 3: Sumas y restas de fracciones:

Para sumar o restar fracciones con igual denominador, se suman o se restan los numeradores dejando el mismo denominador

Ejemplo: $\frac{5}{9}+\frac{8}{9}-\frac{7}{9}=\frac{5+8-7}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

Cuando las fracciones tienen denominadores diferentes, las reduciremos primero, a común denominador.

Ejemplo:

$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=\frac{5}{20}+\frac{12}{20}-\frac{2}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

1. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones con el mismo denominador:

a. $\frac{4}{3}+\frac{11}{3}=$

b. $\frac{11}{7}+\frac{23}{7}=$

c. $\frac{3}{2}-\frac{9}{2}=$

d. $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=$

e. $\frac{15}{14}+\frac{13}{14}=$

f. $\frac{40}{5}+\frac{10}{5}+\frac{5}{5}=$

g. $\frac{66}{4}-\frac{33}{4}-\frac{1}{4}=$

h. $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=$

i. $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}-\frac{12}{7}=$

j. $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{14}{5}-\frac{6}{5}=$

2. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones con distinto denominador(recuerda que primero tienes que reducir todas las fracciones a común denominador)

a. $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=$

b. $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-3=$

c. $\frac{5}{2}+\frac{1}{3}-\frac{7}{6}=$

d. $\frac{6}{5}+\frac{8}{3}=$

e. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$

f. $\frac{1}{6}+\frac{2}{4}=$

g. $\frac{1}{3}+\frac{3}{6}-\frac{2}{4}=$

h. $\frac{4}{6}+\frac{1}{4}+\frac{7}{3}=$

i. $\frac{11}{36}-\frac{5}{12}+\frac{4}{9}-\frac{7}{24}=$

j. $\frac{5}{3}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-\frac{1}{8}=$

k. $\frac{11}{3}-2=$

l. $7+\frac{4}{3}=$

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 4: Multiplicación y división de fracciones:

El producto de dos o más fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y, por denominador, el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 9}=\frac{6}{45}$

Dividir dos fracciones equivale a multiplicar la primera por la inversa de la segunda. Una fracción inversa es otra fracción en la que se han intercambiado numerador y denominador.

Así, la inversa de $\frac{a}{b}$ **es** $\frac{b}{a}$ **pues** $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

Ejemplo: $\frac{8}{3}:\frac{5}{9}=\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{5}=\frac{72}{15}=\frac{24}{5}$

Recuerda: para dividir fracciones, multiplicamos en zig– zag: $\frac{8}{3}\bullet\frac{5}{9}=\frac{8\bullet 9}{3\bullet 5}$

1. Realiza las siguientes operaciones de multiplicación de fracciones:

 a. $2\cdot\frac{1}{4}=$

 b. $\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3}=$

 c. $\frac{3}{5}\cdot 8=$

 d. $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{4}=$

 e. $\frac{1}{4}\cdot 1000=$

 f. $\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{12}{21}=$

 g. $\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{5}=$

2. Calcula las siguientes multiplicaciones de fracciones:

a. $\frac{5}{15}$ de $450 =$

b. $\frac{1}{4}$ de $64 =$

c. $\frac{5}{7}$ de $84 =$

3. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones:

a. $-\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}=$

b. $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=$

c. $\frac{9}{2}:\frac{4}{6}=$

4. Completa las expresiones para que se cumplan estas operaciones:

a. $\frac{\ }{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$

b. $\frac{\ }{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{20}{9}$

5. Realiza las siguientes operaciones:

a. $-\frac{3}{5}:\left(\frac{-6}{7}\right)=$

b. $\frac{5}{2}\cdot(-2)=$

c. $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{8}{3}=$

d. $(\frac{5}{5}:\frac{2}{6})\cdot\frac{1}{3}=$

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 5: Operaciones combinadas con fracciones:

Para realizar operaciones combinadas de fracciones, hay que respetar la jerarquía de las operaciones, que seguirá el siguiente orden:

1º) **Se efectúan las operaciones que están en el interior de los paréntesis y corchetes.**
2º) **Se calculan las potencias y las raíces.**
3º) **Se realizan las operaciones de multiplicaciones y divisiones en el orden que aparecen de izquierda a derecha.**
4º) **Se efectúan las operaciones de suma y resta.**

1. Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a. $\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{30}\right)=$

b. $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}-2=$

c. $\frac{7}{2}-3\cdot\frac{4}{5}=$

d. $\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{8}+\left(\frac{-3}{2}\right)=$

e. $\frac{5}{2}-3\cdot\frac{1}{4}=$

2. Calcula:

a. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{6}{8}\right)=$

b. $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)=$

c. $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=$

d. $\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{3}=$

e. $\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{3}=$

f. $\left(\frac{2}{3}\cdot 5-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}=$

3. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a. $\frac{6}{45}:\left(\frac{5}{25}+\frac{7}{25}\right)=$

b. $\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{5}\cdot 5\right)-\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{3}{4}=$

c. $-3\cdot\frac{4}{15}-\left(\frac{7}{8}\cdot 5-9\right)=$

d. $\frac{4}{7}\cdot(-2)\ -1-\frac{1}{4}\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right)=$

e. $\left(\frac{1}{9}-\frac{7}{6}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{10}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=$

f. $3:\left[3-\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{7}{2}+1\right)-\frac{1}{2}:3\right]=$

g. $3-4\cdot\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=$

h. $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}:\frac{5}{4}+\frac{1}{10}\right):\left(-1-\frac{4}{3}\cdot(-2)\right)=$

i. $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)+4\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right)=$

j. $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{15}\right)+2:\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=$

k. $2\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{5}:(-2)-\frac{1}{12}-\frac{3}{2}:\frac{5}{2}=$

l. $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right):\left(-4+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=$

m. $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right]:\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{2}{9}\right)=$

n. $\dfrac{1-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}+3}=$

o. $\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{3}{5}}-\dfrac{3+\dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{4}-2}=$

p. $\dfrac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}:\left(1-\dfrac{2}{5}\right)}{\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{7}{2}\right)}=$

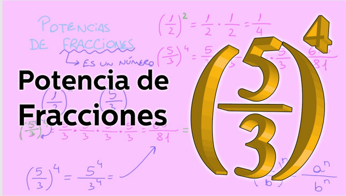
q. $1+\dfrac{2}{3+\dfrac{4}{5-\dfrac{1}{6}}}=$

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 6: Potencia de fracciones

Para elevar una fracción a una potencia se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{\text{n veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$



En una fracción negativa:

- **Si el exponente es par, el resultado es positivo** $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.
- **Si el exponente es impar, el resultado es negativo** $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{4}$

Para multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

Para dividir potencias con la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Una potencia de exponente cero es igual a la unidad: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

1. Escribe en forma de potencia:

a. $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} =$

b. $\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\left(\frac{-1}{3}\right) =$

c. $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{25}{49} =$

d. $\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{8}{11} =$

e. $\left(\frac{-8}{6}\right)\cdot\left(\frac{-8}{6}\right)$

2. Indica si son ciertas las siguientes igualdades:

a. $\left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$

b. $\left(\frac{-3}{-3}\right)^4 = 81$

3. Expresa en forma de producto y halla el resultado de las siguientes potencias:

a. $\left(\frac{10}{3}\right)^2 =$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

c. $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 =$

4. Halla el resultado de las siguientes potencias:

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

b. $\left(-\frac{5}{7}\right)^2 =$

c. $\left(-\frac{8}{7}\right)^5 =$

5. Realiza las siguientes operaciones con potencias de fracciones:

a. $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 =$

b. $\left(\frac{2}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^8 =\cdot$

c. $\left(\frac{5}{7}\right)^5 : \left(\frac{5}{7}\right)^3 =$

d. $\left(\frac{8}{3}\right)^9 : \left(\frac{8}{3}\right)^2 =$

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 7: Potencia de fracciones

1. Calcula las siguientes operaciones:

a. $-3^2 \cdot \left(-\frac{3}{15}\right) =$

b. $\left(\frac{5}{4}\right)^0 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-5) =$

c. $2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 =$

2. Calcula:

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

b. $\left(\frac{1}{10}\right)^3 =$

c. $\left(\frac{10}{3}\right)^3 =$

3. Calcula :

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 =$

b. $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2^{-2} \cdot 2^4 =$

c. $\left(\frac{2}{7}\right)^4 : \left(\frac{2}{7}\right)^3 =$

d. $\left(\frac{-2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^3 =$

e. $\left(\frac{2}{7}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^5 =$

f. $\left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 =$

g. $\left(\frac{5}{3}\right)^{5} : \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} =$

h. $\left(-\frac{2}{7}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^{-5} =$

i. $\left\{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{4} =$

j. $\left\{\left[\left(\frac{-1}{3}\right)^{3}\right]^{5}\right\}^{7} =$

k. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{16} =$

l. $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\right]^{3} : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{9} =$

m. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-1} =$

n. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{3} : \frac{3}{4} - \frac{5}{2}\right] + \left(\frac{3}{2}\right)^{2} =$

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 8: Problemas de "fracción de una cantidad"

1. De los 30 alumnos de una clase, $\frac{3}{5}$ son chicas ¿Cuántas chicas hay?

2. De una clase de 24 alumnos, los $\frac{3}{8}$ han tenido la gripe, ¿Qué fracción de alumnos no han enfermado?

3. En una fiesta se colocaron 16 bombillas de colores. Al terminar solo funcionaba un cuarto de ellas. ¿Cuántas bombillas se fundieron?

4. He recorrido 900 metros, que suponen los $\frac{3}{7}$ del recorrido ¿Cuál es la longitud total?

5. La tercera parte de la capacidad de un depósito son 150 m3. Hallar la capacidad del depósito.

6. En un bote de 6 litros lleno tenemos $\frac{2}{3}$ de pintura y el resto es agua. ¿Cuánta es la cantidad de agua?

7. En un colegio hay un total de 630 alumnos, $\frac{2}{3}$ del total practican fútbol. ¿Qué cantidad de alumnos del colegio lo practican?

8. Los $\frac{2}{5}$ de los rosales de una rosaleda con mil rosales son de rosas rojas. ¿Cuántos rosales son de otros colores?

9. En un monte había robles. Se queman los $\frac{3}{5}$ de los robles y ahora quedan 125. ¿Cuántos Robles había en el monte?

10. Los $\frac{2}{5}$ de una determinada compra son 6 €. ¿A cuánto ascendió la cuenta?

11. Los $\frac{3}{8}$ de una población son 6000 habitantes. ¿Cuántos habitantes tiene en total?

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 9: Problemas de “operaciones con fracciones”

1. Fran ha regado $\frac{4}{6}$ del césped y Raquel los $\frac{4}{12}$ restantes. ¿Cuál de los dos ha regado mayor zona de césped?

2. Luis, Pedro y Antonio, reunieron las cantidades de dinero que sus familias les regalaron en Navidad. Luis recibió $\frac{6}{8}$ de 100 €, Pedro recibió $\frac{7}{8}$ de 100 €, y Antonio recibió $\frac{3}{8}$ de 100 €. ¿Cuánto dinero consiguieron los tres juntos?

3. Cuatro mensajeros se han repartido un cierto número de paquetes para entregar David se ha encargado de $\frac{1}{3}$ de los paquetes, Ángela de $\frac{5}{25}$, Lucía de $\frac{3}{10}$ y Miguel de $\frac{2}{12}$.

a. Ordena de mayor a menor la cantidad de paquetes entregados.

b. ¿Quién ha repartido más paquetes? ¿Y quién menos?

4. Una caja de bombones contiene 40 bombones. Pedro se come una quinta parte de la caja y su prima Lourdes $\frac{3}{8}$. ¿Qué fracción de la caja comen entre los dos? ¿Cuantas galletas quedan en la caja?–

5. Una máquina teje en un día $\frac{1}{8}$ de una pieza de 96 metros. Al día siguiente teje los $\frac{2}{7}$ de lo que quedó por tejer el día anterior. ¿Cuántos metros ha tejido en los dos días? ¿Qué parte de la pieza queda por tejer?

6. Claudia tiene ahorrados 180 €. Se ha gastado $\frac{1}{20}$ en una entrada de cine, $\frac{1}{3}$ en un juego para la videoconsola, $\frac{4}{45}$ en un libro de aventuras y $\frac{2}{15}$ en una mochila. Si luego se fue a comprar una blusa y unos pantalones y le han sobrado 21 €.

a. ¿Qué fracción se ha gastado en ropa?
b. ¿Cuánto dinero le ha valido cada compra?

7. Un agricultor tiene una finca de 25.000 ha. Se reserva para él $\frac{1}{5}$ de la superficie y el resto lo reparte entre sus dos hijos en partes iguales. Uno de los hijos vende $\frac{3}{10}$ de lo recibido. Calcular las hectáreas que al final tienen el padre y cada hijo.

8. Juan gasta los $\frac{3}{5}$ del dinero que tenía y le sobran 30 euros. ¿Con cuánto dinero salió? ¿Cuánto dinero gastó?

9. Andrés se comió $\frac{1}{5}$ de los bombones de una caja y Ana $\frac{1}{2}$ de la misma. ¿Qué fracción de bombones se comieron entre las dos? Si quedaron 12 bombones, ¿cuántos bombones tenía la caja?

UNIDAD DIDACTICA 4: OPERACIONES CON FRACCIONES

FICHA 10: Problemas de "fracción de otra fracción"

1. Los tres quintos de los animales de un parque natural son mamíferos, y de estos mamíferos, los cinco sextos son carnívoros. ¿Qué fracción del total de animales representan los mamíferos carnívoros?

2. Entre tres hermanos deben repartirse 120 euros. El primero se lleva $\frac{7}{15}$ del total, el segundo $\frac{5}{12}$ del total y el tercero el resto. ¿Qué fracción del total se lleva el 3ª?

3. En la selección para un concurso televisivo, eliminan a $\frac{7}{12}$ de los aspirantes en la primera prueba y en la segunda prueba abandonan $\frac{4}{13}$ de los que quedaban.
   a. ¿Qué fracción de los concursantes superan la segunda prueba?
   b. Si 130 aspirantes pasan la primera prueba. ¿Cuantos quedan tras la segunda?

4. Una máquina teje en un día $\frac{1}{8}$ de una pieza de 96 metros. Al día siguiente teje los $\frac{2}{7}$ de lo que quedó por tejer el día anterior. ¿Cuántos metros ha tejido en los dos días? ¿Qué parte de la pieza queda por tejer?

5. Un panadero aparta cada semana, para el consumo de su familiar, $\frac{1}{100}$ de las barras de pan que fabrica. Si vende 3415 barras y regala lo que le sobra $\frac{1}{70}$ del total de barras, ¿cuántas barras de pan elabora?

6. En las elección a delegado de clase, Daniel ha obtenido $\frac{2}{5}$ de los votos, Saray $\frac{1}{3}$, Nerea $\frac{1}{15}$ y Luisa el resto. En total ha habido 30 votos.

a. ¿Qué fracción de votos ha obtenido Luisa?

b. ¿Cuántos votos ha recibido cada uno?

7. De la comida que hay en la nevera, $\frac{1}{3}$ son alimentos sólidos. De estos, $\frac{1}{2}$ son vegetales, de los cuales $\frac{3}{5}$ son frutas y de ellas $\frac{2}{5}$ son manzanas.

a. ¿Qué fracción del total son manzanas?

b. Si en la nevera hay 150 alimentos, indica cuántos son sólidos, cuantos vegetales, cuántos frutas y cuántos manzanas.

8. De los vecinos de la casa de Rosa, $\frac{2}{7}$ son rubios y la cuarta parte de estos tienen los ojos azules. Sabiendo que hay 6 vecinos con los ojos azules. ¿Cuántos vecinos hay en la casa de Rosa?

9. $\frac{3}{5}$ de las alumnas de una clase hacen el camino en coche o en autobús, las demás van andando. Si los tres cuartos de los alumnas que usan vehículo hacen el viaje en coche y 9 alumnas utilizan el autobús. ¿Cuántas alumnas hay en clase?

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 1: Relación de proporcionalidad directa e inversa.

1. PROPORCIÓN DIRECTA: Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción directa si al aumentar una de ellas el doble la otra aumenta el doble, si ésta aumenta el triple la otra aumenta el triple, etc. En definitiva, si una de ellas aumenta la otra también lo hace y además en la misma proporción.

2. PROPORCIÓN INVERSA: Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción inversa si al disminuir una de ellas la mitad la otra disminuye a la mitad, si ésta disminuye a la tercera parte la otra disminuye a la tercera parte, etc. En definitiva, si una de ellas disminuye la otra también lo hace y además en la misma proporción.

1. Indica, en cada caso, si existe proporcionalidad directa (D), inversa (I) o ninguna de las dos (X):

a) El número de personas que van en el autobús y la recaudación del autobús.	
b) El número de páginas de un libro y su precio.	
c) El número de vacas que posee un granjero y la cantidad de pienso que gasta a la semana.	
d) El número de páginas de un libro y el peso que tiene.	
e) El número de hijos de una familia y el número de días que tiene de vacaciones el padre.	
f) El tamaño de una caja y el número de cajas iguales que se pueden almacenar en una nave.	
g) El caudal (litros/minuto) que arroja un manantial y el tiempo que tarda en llenar 20 litros.	
h) El tiempo que tenemos colocado un cántaro en la fuente y la cantidad de agua que recogemos.	
i) El tiempo que está encendida una bombilla y el gasto de energía.	

j) La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en cubrir la distancia entre dos ciudades.	
k) El precio de un coche y el número de asientos que lleva.	
l) El número de horas trabajadas y el salario percibido.	
m) El número de operarios y el tiempo empleado en hacer determinado trabajo.	
n) Cantidad de género y cantidad de abrigos.	
ñ) Litros de bencina y kilómetros que puede recorrer un auto.	
o) Tiempo empleado en recorrer una distancia y velocidad.	
p) Cantidad de árboles y cantidad de oxígeno producido.	
q) Volumen de una cantidad de aceite y su peso.	
r) El precio de la entrada y el tiempo que dura la película.	
s) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.	
t) La edad de una persona y su altura.	
u) La distancia que recorre un coche y el número de vueltas que da una rueda.	
v) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir cierta distancia.	

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 2: Proporcionalidad directa. Regla de tres.

Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción directa si al aumentar una de ellas el doble la otra aumenta el doble, si ésta aumenta el triple la otra aumenta el triple, etc. En definitiva, si una de ellas aumenta la otra también lo hace y además en la misma proporción.

EJEMPLO: Manolo ha comprado 3 latas de refresco por un total de 6€. ¿Cuánto le costarán 5 latas?

1. Planteamos cada magnitud en una columna distinta de dos entradas con los datos del problema, poniendo x en el lugar de la que no conocemos (¡Ojo! no se pueden mezclar magnitudes en una misma columna).

Nº latas	D	precio (€)
3		6
5		x

2. Justificamos que la relación es directa y ponemos una D.

3. Para calcular el valor de x en una proporción directa dividimos por columnas en el mismo orden e igualamos. Después despejamos la x como si fuera una ecuación.

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\cdot 6}{3}=10$$

<u>Método de reducción a la unidad:</u> Otra manera alternativa de hacerlo, si las operaciones son sencillas es, calculando en primer lugar lo que vale una lata (6 : 3 = 2 €) y concluir después que 5 latas serán 5 x 2 = 10 €.

1. Un grupo de 3 amigos ha decidido comprar una bebida para cada uno. Cada bebida cuesta 2’30 €. ¿Cuánto les costarán 9 bebidas?

2. Si 5 botellas de leche cuestan 4’25 €, ¿cuánto costará una caja de 12 botellas?

3. Una rueda da 4.590 vueltas en 9 minutos. ¿Cuántas vueltas dará en 2 horas y media?

4. En 50 litros de agua de mar hay 1.300 g. de sal. ¿Cuántos litros hacen falta para 5.200 g. de sal?

5. Un coche tarda en recorrer 120km en 80 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 200 km?

6. Un deportista recorre 4.500 m. en 10 minutos. ¿Cuántos km. recorrerá en media hora?

7. El precio por kilo de queso azul es de 23’35€. ¿Cuánto nos costarán 125 g de queso?

8. José marca 5 goles cada 25 minutos de partido. Calcular mediante una regla de tres cuántos goles marcará en una hora.

9. Pablo se gasta 6 kg de garbanzos en un cocido para sus padres y seis hermanos. ¿Cuántos kilos de garbanzos se gastará en hacer el cocido si vienen dos hermanos más?

10. Para obtener el certificado de inglés se necesita obtener un 7 sobre 10 en un test de 243 preguntas. Calcular el número mínimo de preguntas correctas necesarias para obtenerlo.

11. Un automóvil ha tardado en hacer el recorrido Madrid-Zaragoza tres horas y cuarto a una media de 100 km/h. ¿Cuánto tardará un autobús a una media de 90 km/h

12. Sonia ha cobrado por repartir propaganda durante cinco días 126 euros ¿Cuántos días deberá trabajar para cobrar 340’2 euros?

13. En una panadería con 80 kg son capaces de hacer 120 kg de pan. ¿Cuántos kg de harina serán necesarios para hacer 99 kg de pan?

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 3: Constante de proporcionalidad directa

Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción directa si al aumentar una de ellas el doble la otra aumenta el doble, si ésta aumenta el triple la otra aumenta el triple, etc. En definitiva, si una de ellas aumenta la otra también lo hace y además en la misma proporción.

EJEMPLO: Manolo ha comprado 3 latas de refresco por un total de 6 €. ¿Cuánto le costarán 5 latas?

Latas (nº)	3	5	8		10		20
Precio (€)	6	10	16	18	x	32	

En una proporción directa, el cociente entre dos datos de la misma columna es siempre el mismo. A este valor le llamamos <u>constante de proporcionalidad</u>, y se le denota con la letra "k".

Esto nos permite calcular cualquier valor que falta en la tabla llamándolo x, planteando una igualdad entre los cocientes de datos por columnas.

Ejemplo: $\frac{3}{6} = \frac{10}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \cdot 10}{3} = 20$

Otra ventaja de la constante de proporcionalidad es la de permitirnos encontrar una fórmula que relacione las dos magnitudes: Esta sistematización nos permite ahorrar trabajo.

1. Un grupo de 3 amigos ha decidido comprar una bebida para cada uno. Cada bebida cuesta 6 €. Completa la siguiente tabla.

nº bebidas	1	10	25	40	
Precio (€)	6				240
Constante					

2. Una rueda da 4.590 vueltas en 9 minutos. Completa la siguiente tabla:

nº vueltas		1020		2040	4590
Tiempo (min)	1		3		9
Constante					

3. En 50 litros de agua de mar hay 1300 gr. de sal. Completa la siguiente tabla:

Sal (gr.)	1300	1430		2040	5200
Agua (l)	50		60		
Constante					

4. Un coche tarda en recorrer 120km en 80 minutos. Completa la siguiente tabla:

Espacio (km)	120	150		300	400
Tiempo (min)	80		120		
Constante					

5. Un deportista recorre 4.500 m. en 10 minutos. Completa la siguiente tabla:

distancia(m)	4500			27000	40000
tiempo(min)	10	20	55		
Constante					

6. Pablo se gasta 3 kg de garbanzos en un cocido para sus padres y sus hermanos. Completa la siguiente tabla:

Familiares (nº)	9	12	15		
Garbanzos (kg)	3			12	16
Constante					

7. Dos kilos de naranjas cuestan 1’50 €. Completa la tabla.

Naranjas (nº)	2	10	5		
Precio (€)	1’5			12	18
Constante					

8. El precio de 12 fotocopias es de 0’50 €. Completa la tabla.

Nº Fotocopias	12	10	50		
Precio (€)	0’5			15	3
Constante					

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 4: Proporcionalidad inversa. Regla de tres inversa.

PROPORCIÓN INVERSA.

Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción inversa si al duplicar una de ellas la otra disminuye a la mitad, si ésta se triplica la otra disminuye a la tercera parte, etc. En definitiva, si una de ellas aumenta la otra disminuye lo hace y además en la misma proporción.

EJEMPLO: Los padres de Juan tardan en barrer la casa 4h los fines de semana. ¿Cuánto tardarán en barrer la casa si además participan los dos hermanos?

1. Planteamos cada magnitud en una columna distinta de dos entradas, poniendo x en el lugar de la que no conocemos (¡Ojo! no se pueden mezclar magnitudes en una misma columna).

Nº personas	I	Tiempo (h)
2		4
2+2		x

2. Justificamos que la relación es inversa y ponemos una I.

3. Para calcular el valor de x en una proporción inversa dividimos por columnas. La columna de la "x" en el mismo orden y la otra columna en orden inverso. Después despejamos la x como si fuera una ecuación: $\frac{4}{2} = \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \cdot 2}{4} = 4$

<u>Método de reducción a la unidad:</u> Otra manera alternativa de hacerlo, si las operaciones son sencillas, es calculando primero lo que tarda una persona en barrer la casa, que será el doble de lo que tardan dos personas, es decir, 8h y concluir después que 4 personas tardan cuatro veces menos, es decir, 8 : 4 = 2 h.

1. 4 albañiles tardan en arreglarme el tejado 18 días. Si quiero acabar el tejado en 12 días, ¿Cuántos albañiles tengo que contratar?

2. Un camión que carga 300 kg. da 15 viajes para transportar una carga. ¿Cuántos viajes dará otro camión para transportar la misma carga si puede cargar 4'5 toneladas?

3. Con un depósito de agua pueden beber 30 caballos durante 8 días. Si se venden 6 caballos, ¿cuántos días durará el agua?

4. 3 Amigos ponen 7'50 € cada uno para hacer un regalo. Si dos amigos más quieren participar en el regalo, ¿cuánto debe poner cada uno?

5. Para alimentar a 30 perros se necesitan 45 kg. de comida. Si llegan 12 perros más, ¿Cuánta comida necesitamos?

6. Seis máquinas excavadoras hacen una zanja en 18 días, si pasan a ser 10 excavadoras, ¿Cuánto tardarán en abrir la zanja?

7. Seis personas realizan un trabajo en 12 días, ¿cuánto tardarán 8 personas?. Resuelve por reducción a la unidad.

9. Seis fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

10. Para construir una casa en ocho meses han sido necesarios seis albañiles. ¿Cuántos habrían sido necesarios para construir la casa en tan sólo tres meses?

11. Un granjero tiene pienso en su almacén para alimentar 2500 pollos durante 60 días. ¿Cuántos pollos debe vender si desea que el pienso le dure 80 días?

12. Dieciocho alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

13. Tres trabajadores recolectan 100 manzanos en 5 horas. Uno de ellos ha sufrido un accidente laboral y no puede continuar con su tarea. Calcular cuánto se tardará en recolectar los 300 manzanos restantes entre los dos trabajadores activos.

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 5: Constante de proporcionalidad inversa.

PROPORCIÓN INVERSA

Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción inversa si al duplicar una de ellas la otra disminuye a la mitad, si ésta se triplica la otra disminuye a la tercera parte, etc. En definitiva, si una de ellas aumenta la otra disminuye lo hace y además en la misma proporción.

Ejemplo: 32 obreros tardan 8 días en cavar una zanja. Completa la tabla.

Obreros (nº)	64	32	16	8		x	1
Tiempo (días)	4	8	16		64	128	256

En una proporción inversa, el producto de dos datos de la misma columna es siempre el mismo. A este valor le llamamos constante de proporcionalidad, y se le denota con la letra "k".

Esto nos permite calcular cualquier valor que falta en la tabla llamándolo x, planteando una igualdad entre los cocientes de datos por columnas (en el mismo orden)

Ejemplo: $64 \cdot 4 = 128 \cdot x \Rightarrow x = \frac{64 \cdot 4}{128} = 2$

Otra ventaja de la constante de proporcionalidad es la de permitirnos encontrar una fórmula que relacione las dos magnitudes: Esta sistematización nos permite ahorrar trabajo.

Método de reducción a la unidad: Otra manera alternativa de hacerlo, si las operaciones son sencillas, es calculando primero lo que tarda un albañil en cavar la zanja, que es de 256 días, y concluir después que, para realizar ese trabajo en la mitad de tiempo, haría falta el doble de personas, es decir, 2.

1. 4 albañiles tardan en arreglarme el tejado 18 días. Completa la tabla.

nº albañiles		36	9	3	
Tiempo (días)	1				72
Constante					

2. Un camión que carga 300 kg da 15 viajes para transportar una carga. Completa la tabla.

Carga (kg)				300	150
nº viajes	5	10		15	
Constante					

3. Con un depósito de agua pueden beber 30 caballos durante 8 días. Completa la tabla.

nº caballos		5	30	35	40
Tiempo (días)	12		8		6
Constante					

4. 3 Amigos ponen 7'50 € cada uno para hacer un regalo. Completa la tabla.

nº amigos	3	5		10	
Dinero (€)	7,5		2,81		1,88
Constante					

5. Para alimentar a 30 perros se necesitan 45 kg. de comida. Completa la tabla.

nº perros		15	20	25	30
Comida (kg)	15				45
Constante					

6. Seis máquinas excavadoras hacen una zanja en 18 días. Completa la tabla.

nº máquinas	6	8	12	18	
Tiempo (días)	18				4,5
Constante					

14. Para construir una casa en ocho meses han sido necesarios seis albañiles. Completa la tabla.

Nº albañiles	6		8		
Tiempo (meses)	8	3		24	16
Constante					

15. Un granjero tiene pienso en su almacén para alimentar 2500 pollos durante 60 días. Completa la tabla.

Nº de pollos	2.500		3000	5000	
Tiempo (días)	60	80			45
Constante					

16. Dieciocho alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera. Completa la tabla.

Nº de alumnos	18		24	20	
Dinero (€)	6	8			12
Constante					

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 6: Regla de tres compuesta.

Ejemplo: Dos obreros trabajando 4 horas diarias realizan un trabajo en 16 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 4 obreros trabajando 8 horas?

Nº obreros	I	trabajo(horas)	I	tiempo (días)
2		4		16
4		8		x

1. Justificamos si la relación de cada columna con la columna de la incógnita es directa o inversa y ponemos una I o una D.

2. Para calcular el valor de x en una proporción compuesta dividimos por columnas (las inversas en orden inverso) multiplicando todos los resultados de las columnas sin la 'x' e igualamos. Después despejamos la x como si fuera una ecuación.

El orden de la columna de la x no se cambia.

$$\frac{4}{2}\cdot\frac{8}{4}=\frac{16}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{16\cdot 4\cdot 2}{4\cdot 8}=4$$

1. Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas? Resolver el problema aplicando el método de las proporciones.

2. En una fábrica 6 máquinas iguales producen en 2 horas 600 piezas. ¿Cuántas piezas producirán 9 de estas máquinas en 3 horas? Resolver el problema aplicando el método de reducción a la unidad.

3. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios empleando 3 horas al día?

4. Una pieza de tela de 2'5 m de larga y 80 cm de ancha cuesta 30 €. ¿Cuánto costará otra pieza de tela de la misma calidad de 3 m de larga y 1'20 m de ancha?

5. Para recorrer una distancia de 15.000 Km un pájaro tarda 20 días, volando durante 9 horas diarias. ¿Cuántos días tardará en recorrer 2.000 Km, si vuela durante 12 horas diarias?

6. Con el vino contenido en recipiente llenamos 63 vasos de 12 centilitros de capacidad. Con el vino de otro recipiente que contiene la misma cantidad que el primero hemos llenado 42 vasos. ¿Qué capacidad tiene cada uno de estos vasos?

7. He comprado 6 metros de cuerda que en total me han costado 80 €. ¿Cuánto me costarían 227 metros de dicha cuerda?

8. Durante 15 días una familia compuesta por 6 personas ha gastado 900 € en alimentación. ¿Cuánto gastaría una pareja en 20 días?

9. Por depositar 275.000 € en un banco me dan al año 15.400 €. ¿Cuánto dinero me entregarán si deposito 100 € durante ese mismo tiempo?

10. Cuatro grifos llenan en 12 horas dos depósitos de agua de 60 m^3 de capacidad cada uno. ¿Cuánto tiempo tardarían 6 grifos, iguales a los anteriores, en llenar 3 depósitos de 80 m^3 cada uno?

11. Para pavimentar una calle de 600 m de largo y 24 m de ancho se han utilizado 36.000 adoquines. ¿Cuántos adoquines se necesitarían para otra calle de 500 m de largo y 30 m de ancho?

12. Los 14 depósitos para el suministro de agua a una población tienen la misma capacidad. Para llenar 5 de ellos se necesitan 4 bombas que estén funcionando durante 10 horas. Si queremos llenar todos los depósitos, ¿durante cuánto tiempo deberán estar funcionando 8 bombas iguales a las mencionadas antes?

13. Un equipo de 8 programadores trabajará 6 horas diarias para desarrollar un software en un año. Si se forma un equipo de 10 programadores trabajando 4 horas diarias, ¿cuántos años se necesitan para realizar un proyecto de la misma envergadura?

14. Se sabe que 6 mangueras abiertas durante 3 horas equivalen a 10.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenar una piscina de 130.000 litros con 4 de estas mangueras?

15. Si con 4 grifos de agua cuyas bocas de salida son de $2cm^2$ se obtienen 300 litros en un determinado tiempo, ¿cuántos litros se obtienen en el mismo tiempo con 2 grifos con bocas de $3cm^2$?

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 7: Reparto directamente proporcional.

Se denominan problemas de reparto proporcional a aquellos en los que una determinada cantidad debe repartirse proporcionalmente a otras cantidades.

Ejemplo:

Repartir 118.400 € entre tres amigos a los que les ha tocado la lotería, sabiendo que cada uno de ellos ha jugado 300, 240 y 200 €.

Como la relación entre el premio que se va a recibir y el dinero jugado es proporcional podemos poner:

Parte (€)	**x**	**y**	**z**	**118.400**
Premio (€)	**300**	**240**	**200**	**300+340+200**

La suma de los premios tiene que ser el total, es decir, 118.400 €:

$$\frac{x}{300}=\frac{y}{240}=\frac{z}{200}=\frac{x+y+z}{300+240+200}=\frac{118.400}{740}=160 \quad \Rightarrow$$ **k = 160 (constante de proporcionalidad)**

$$\frac{x}{300}=160 \quad \Rightarrow \quad x=48.000\ €$$

$$\frac{y}{240}=160 \quad \Rightarrow \quad y=38.400\ €$$

$$\frac{z}{200}=160 \quad \Rightarrow \quad z=32.000\ €$$

Observa que 48.000 + 38.400 + 32.000 = 118.400 €

1. Dos amigas juntan 1’20 y 1’80 euros que tenían para comprar un paquete de pegatinas de una serie de dibujos animados que vale tres euros. El paquete contiene 120 pegatinas. ¿Cómo deben repartírselas de forma justa?

2. Un abuelo reparte 450 € entre sus tres nietos de 8, 12 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

3. Repartir 1.184.000 € entre tres amigos a los que les ha tocado la lotería, sabiendo que cada uno de ellos ha jugado 3.000, 2.400 y 3.000 €

4. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente, inversamente proporcional a su edad, 5.900 €. Si sus edades son de 20, 24 y 32 años, ¿cuánto aporta cada uno?

5. Se quiere repartir unos beneficios de 40.000 € entre tres trabajadores proporcionalmente a los años que llevan en la empresa, que son 10, 12 y 18 años. ¿Cuánto recibirá cada uno?

6. Cuatro obreros han cobrado 65.000 € por su trabajo. Sabiendo que el primero ha realizado los $\frac{1}{4}$ del trabajo, el segundo $\frac{1}{3}$, el tercero $\frac{2}{7}$ y el cuarto el resto. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

7. Tres agricultores alquilan una segadora por 139.500 €. Si tienen 2ha, 3ha, y 4 ha. respectivamente. ¿Cuánto ha de pagar cada uno?

8. Una fuente cuenta con cuatro grifos que han arrojado un total de 12'6 m^3. El primero ha estado abierto 1 hora y 20 minutos; el segundo, 90 minutos; el tercero, una hora y cuarto, y el cuarto, dos horas menos cuarto. ¿Cuántos litros ha arrojado cada grifo?

9. Por un reportaje fotográfico, tres fotógrafos cobraron 6720 euros. Del reportaje, 14 fotos eran de un fotógrafo, 18 del segundo y 24 del tercero. ¿Qué cantidad de euros le corresponde a cada uno?

10. Una localidad tiene 3 institutos. El instituto A tiene matriculados 520 alumnos, el B 360 alumnos y el C 140 alumnos. Para su funcionamiento se debe repartir 124.440 € en partes directamente proporcionales al número de alumnos que tienen matriculados. ¿Cuánto recibirá cada instituto?

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 8: Reparto inversamente proporcional

No siempre es justo repartir de forma que le corresponda más a la mayor cantidad en un reparto.

Se denominan problemas de reparto inversamente proporcional aquellos en los que una determinada cantidad debe repartirse en proporción inversa a otras cantidades.

Ejemplo:

En una carrera se destinan 587.000 € para los tres primeros premios, que ha de repartirse según los tres mejores tiempos empleados. Estos tiempos han sido de 26, 28 y 30 minutos. Hallar el premio que le corresponde a cada corredor.

Como la relación entre el premio que se va a recibir y el dinero jugado es inversamente proporcional podemos poner:

Debemos repartir inversamente a 26, 28 y 30, que es lo mismo que repartir directamente a 1/26, 1/28 y 1/30. Es decir:

Parte (€)	**x**	**y**	**z**	**587.000**
Premio (€)	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{28}\frac{1}{30}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}=\frac{587}{5460}$

$$\frac{x}{\frac{1}{26}}=\frac{587.000}{\frac{587}{5460}} \Rightarrow 26\text{ x} = 5.460.000 \Rightarrow \text{x} = 210.000$$

De forma similar obtenemos:

$$28\text{ y} = 5.460.000 \Rightarrow \text{y} = 195.000$$

$$30\text{ z} = 5.460.000 \Rightarrow \text{z} = 182.000$$

Observa que 210.000 + 195.000 + 182.000 = 587.000 €

1. Reparte una herencia de 5.780.000 € entre tres hermanos de forma inversamente proporcional a sus edades que son 4, 6 y 18 años.

2. Repartir 114 caramelos entre cuatro niños de forma inversamente proporcional a las edades de ellos que son de 3, 4, 5 y 6 años respectivamente.

3. En una empresa se quiere repartir una ganancia de 3000 € entre dos empleados. Para ello se quiere tener en cuenta los días que no cumplieron sus objetivos en el último mes, que fueron 3 y 5, respectivamente. ¿Cuánto se llevaría cada uno?

4. Tres municipios, A, B y C, deciden construir en común un canal de riego cuyo importe es de 91 millones de € y deciden que cada uno pague en razón directa al número hectáreas de regadío que se crean. Si las hectáreas de regadío previstas son 3, 4 y 6, respectivamente. ¿Cuánto debe pagar cada municipio?

5. Los dos camareros de un bar se reparten al final de mes un bote con 136 euros de propina de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado. Si uno ha faltado 3 días y otro 5, ¿cuántos euros corresponde a cada uno?

6. Según un testamento, una fortuna de 65.000 euros, se reparte entre tres personas en partes inversamente proporcionales al sueldo de cada una de ellas. Si los sueldos de estas personas son de 900, 1.350 y 1.800 euros, ¿cuánto le corresponde a cada una?

7. En una competición se van a repartir 174 puntos entre cinco participantes, en orden inversamente proporcional al tiempo que tardan en realizar la prueba. Si los participantes tardan 4, 6, 8, 10 y 12 minutos respectivamente, ¿cuántos puntos le corresponde a cada uno?

8. Tres amigos se reparten una pizza de forma inversamente proporcional a sus pesos que son respectivamente 60, 72 y 90 kilogramos. ¿Qué parte de pizza se debe comer cada uno?

9. Se quiere repartir un premio de 1.860 € a los tres mejores corredores de una carrera, de manera inversamente proporcional a los tiempos que han invertido en completar el recorrido. El primer corredor tardó 24 segundos, el segundo 28 y el tercero 30.

10. Se decide construir una estación de ferrocarril en la comarca del Guadalhorce. El coste es de un 1.600.000 € y se acuerda que lo deben pagar las tres localidades principales de manera inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentran de la estación. Coín se encuentra a 6 Km, Alhaurín el Grande a 8 Km y Alhaurín de la Torre a 16 Km de la estación.

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 9: Aumentos porcentuales.

Después del aumento de este año de un 10%, el sueldo de mi madre es ahora de 1938 euros. ¿Cuánto cobraba antes?

Método 1: **Mediante una regla de tres que siempre es directa.**

Sueldo (€)		%
1938	$\rightarrow$	100 + 10
x	$\rightarrow$	100

Ojo: Tomando siempre como referencia el 100 %, si se habla de aumento, uno de los porcentajes va a ser 110 % que naturalmente se refiere a los 1938 €. Por eliminación, el 100% se refiere a lo que nos preguntan.

Método 2: **directamente buscando el sueldo x de modo que:**

x + 10 % de x = 1938

Observación: **Comprueba que, si descuentas el 10% al salario final, no obtienes el sueldo inicial. ¡OJO! ¡Los porcentajes no son recuperables!**

1. En un restaurante han subido el menú del día un 8%. ¿Cuál será el nuevo precio si costaba 7’5 €?

2. En febrero un crucero cuesta 720€ y en agosto aumenta su precio un 30%, ¿cuánto cuesta en agosto?

3. Una camiseta cuesta 21 € después de aumentarla un 30%. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

4. El número de alumnos que juega al baloncesto ha pasado en un año de 110 a 132, mientras que el número de los que juegan al tenis ha pasado de 45 a 57. ¿En cuál de los dos deportes ha sido mayor el aumento porcentual?

5. Me he comprado unas gafas por 65 € con un 21 % de I.V.A. ¿Cuánto costaría sin el I.V.A.?

6. A comienzos de año, la panadería de mi barrio ha subido los precios un 10%. Si antes de la subida una barra normal costaba 80 céntimos, ¿cuánto cuesta tras el aumento de precio?

7. El precio de un coche que hoy cuesta 39.200 € ha subido en el último año un 12 %. ¿Cuánto costaba ese mismo coche hace un año?

8. En la panadería de mi barrio la barra normal ha pasado de 80 a 88 céntimos. ¿Qué porcentaje de subida se ha aplicado?

9. El precio de una batidora, después de cargarle un 18 % de impuestos, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle esos impuestos?

10. Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30 % y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?

11. ¿Qué recargo ha de aplicarse a una camisa que cuesta 50 euros para obtener unos beneficios de 13 euros?

12. Un trabajador ganaba 1580 € al mes en el año 2005. ¿Cuánto ganará al mes en 2006 si el sueldo ha tenido una subida del 2 %?

13. Una familia come en un restaurante por 64 €. ¿Cuánto tendrán que pagar si a ese valor se le añade el 7% de IVA?

14. En una tienda de mi barrio un balón de fútbol con una rebaja del 12% cuesta 39,6 € ¿Cuánto cuesta el balón sin la rebaja?

15. En el cine han subido el precio de la entrada un 7%. ¿Cuál será el nuevo precio si costaba 6 €?

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 10: Disminuciones porcentuales.

En una tienda de mi barrio un balón de fútbol cuesta 50€ y nos hacen una rebaja del 12 %. ¿Cuánto cuesta el balón con la rebaja?

Método 1: Mediante una regla de tres que siempre es directa.

Precio (€)		%
50	→	100
x	→	100 – 12

Ojo: Tomando siempre como referencia el 100% , el precio inicial del balón se corresponde con el 100% y después de rebajarlo pasa al 88% del precio original que va a corresponderse con la incógnita.

Método 2: directamente calculando el 88% de 50 que es 44€:

1. En una tienda de mi barrio un balón de fútbol cuesta 45 €, pero me lo rebajan un 12 % ¿Cuánto cuesta el balón con la rebaja?

2. En una tienda de mi barrio un balón de fútbol con una rebaja del 12 % cuesta 39'6 € ¿Cuánto cuesta el balón sin la rebaja?

3. En una tienda de mi barrio un balón de fútbol que cuesta 45 € sale por 39'6 € esta semana. ¿Qué porcentaje de rebaja aplica la tienda?

4. A comienzos de año, la panadería de mi barrio ha bajado los precios un 10 %. Si antes de la bajada una barra normal costaba 80 céntimos, ¿cuánto cuesta tras la rebaja de precio?

5. En la panadería de mi barrio, tras una bajada del 10 %, la barra normal ha pasado a costar 88 céntimos. ¿Cuánto costaba antes de la bajada de precio?

6. De 5 toneladas de carbón de una mina se eliminan 2.400 kg de impurezas. ¿Qué tanto por ciento es carbón puro?

7. Hace un año compré un coche que me costó 8000 €. Si lo vendiera ahora me darían un 35 % menos de su valor inicial. ¿Cuál es el precio actual del coche?

8. Una cadena musical costaba 800 €, pero me hacen una rebaja del 15 %. ¿Cuánto debo pagar por la cadena?

9. En una tienda hacen una rebaja del 20 % a todos los artículos. ¿Cuánto costará ahora una camisa que antes costaba 35 €? ¿Y un pantalón de 40 €?

10. Tengo 52 € y me quiero comprar un MP3 que costaba antes de las rebajas 60 €. ¿Podré pagarlo si lo rebajan un 15 %?

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 11: Definición y cálculo de porcentajes.

Definición de porcentaje de un número: Es el número de partes que tomamos de un número después de haberlo dividido en 100 partes iguales.

Ejemplo: 12 % de 60 = $\mathbf{\frac{12}{100}\ \text{de}\ \ 60 = \frac{12 \cdot 60}{100} = 7'2}$

1. Completa la siguiente tabla. Simplifica las fracciones tanto como sea posible.

PORCENTAJE	**35**				**80**		**95**	**15**	**20**	
FRACCIÓN		$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$							
NÚMERO DECIMAL				**2’5**		**0’13**				**1’35**

2. Calcula el % de las siguientes cantidades:

a) 51 % de 30 =

b) 21 % de 60 =

c) 76 % de 100 =

d) 10 % de 40 =

e) 60 % de 200 =

f) 25 % de 8000 =

g) 8 % de 1521 =

h) 16 % de 14600 =

3. Calcula mentalmente:

10 % de 2500 =

10 % de 250 =

24 % de 4000 =

32 % de 5000 =

20 % de 750 =

40 % de 500 =

16 % de 1000 =

70 % de 370 =

46% de 2000 =

180 % de 20 =

4. Calcula con lápiz y papel:

23 % de 456 =

65 % de 48 =

48 % de 42’8 =

73 % de 1850 =

5’5 % de 5’5 =

160 % de 150 =

62 % de 2240 =

250 % de 1500 =

5. ¿Qué porcentaje es?

a. 40 de 120

b. 80 de 15

c. 0,2 de 3,2

d. 36 de 0,9

e. 50 de 300

f. 1.400 de 200

g. 0,001 de 1.000

h. 48 de 0,6

i. 10 de 5.000

6. Completa las casillas vacías:

a) 50% de $\boxed{} = 100$	b) 10% de $\boxed{} = 30$
c) 40% de $\boxed{} = 200$	d) 5% de $\boxed{} = 20$
e) 2% de $\boxed{} = 12$	f) 12% de $\boxed{} = 6$

7. Completa las casillas vacías:

a) El $\boxed{}$ % de 1000 es 100	b) El $\boxed{}$ % de 50 es 25
c) El $\boxed{}$ % de 100 es 25	d) El $\boxed{}$ % de 100 es 75
e) El $\boxed{}$ % de 40 es 12	f) El $\boxed{}$ % de 200 es 8

UNIDAD 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

FICHA 12: Aumentos y disminuciones porcentuales mezclados.

1. Un ordenador cuesta 600 €, me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. ¿Cuánto me han descontado? ¿Cuánto he pagado?

2. Una camiseta costaba 34 € y en temporada de rebajas se vende a 24 €, ¿qué % de descuento se ha aplicado sobre el precio anterior?

3. Un producto que costaba 350 € sufre un incremento porcentual del 18 %. ¿Cuánto hemos pagado finalmente por el producto?

4. He pagado 34 € por una sudadera que estaba rebajada un 15 %. ¿Cuánto costaba la sudadera?

5. El precio de un móvil era de 420 euros. Me han rebajado un 21 %, pero después me han cargado el 21 % de IVA. ¿Cuánto me ha costado?

6. La factura de teléfono de una familia es de 65 euros, a falta de añadir el 21 % de IVA. ¿Cuánto supone el IVA? ¿Cuál es el precio final de la factura?

7. Al subir el precio de una bicicleta un 20 %, el precio final es ahora de 360 euros. ¿Cuál era el precio inicial?

8. Por un artículo que estaba rebajado un 12 % hemos pagado 26’4 euros. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?

9. El precio de un litro de gasóleo era de 0’51 euros y, al cabo de un año, se transformó en 0’65 euros. ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida?

10. El precio de un litro de leche (con I.V.A.) es de 0’6 euros. Sabiendo que el IVA en alimentación es del 7 %, ¿cuál será su precio sin I.V.A.?

11. En un pueblo que tenía 200 habitantes, ahora viven solamente 80 personas. ¿Qué porcentaje representa la disminución de la población?

12. Un artículo que costaba inicialmente 60 euros fue rebajado en diciembre un 12 %. En el mes de enero tuvo una segunda rebaja de un 15 %; y, en febrero, se rebajó otro 10 %.

a. Calcula el precio final después de las tres rebajas.

b. ¿Cuál es el porcentaje total de rebaja?

13. El precio sin I.V.A. de un determinado medicamento es de 15 euros.

a. Sabiendo que el I.V.A. es del 4 %, ¿cuanto costará con I.V.A.?

b. Con receta médica solo pagamos el 40 % del precio total. ¿Cuánto nos costaría este medicamento si lo compráramos con receta?

14. Un contrato de alquiler ha subido un 2 % anual durante los tres últimos años. Calcula el precio mensual que tendremos que pagar actualmente, sabiendo que hace 3 años pagábamos 420 euros al mes.

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 1: El lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico utiliza letras, números y signos de operaciones para expresar informaciones.

Ejemplos: El doble de un número: 2x

La suma de dos números: x + y

Las expresiones: 2x, x + y: son expresiones a1gebraicas.

1. Indica las expresiones algebraicas correspondientes a los siguientes enunciados, utilizando una sola letra (x):

a) El siguiente de un número, más tres unidades.	
b) El anterior de un número, menos doce unidades.	
c) El doble de un número más su mitad.	
d) El triple de un número, menos su cuarta parte.	
e) La tercera parte de un número, más el doble de dicho número.	
f) La mitad del siguiente de un número, menos cuatro unidades.	
g) La quinta parte del triple de un número, más dieciocho unidades.	

2. Obtén la expresión algebraica de las siguientes frases, utilizando una o dos letras:

a) Volumen de un cubo desde su arista.	
b) Valor resultante de restar 3 del cuadrado de un número.	
c) Cuadrado de un número sumado con el cubo de otro.	
d) Cuadrado de la suma de dos números.	
e) Suma de los cuadrados de dos números.	
f) Resta de un número la raíz de la suma de otros dos.	
g) Mitad del triple de un número.	

3. El número x es un número entero. Escribe frases equivalentes a las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x + 1$	
b) $x - 1$	
c) $2 \cdot x + x : 2$	
d) $x : 3 + 2 \cdot x$	
e) $(x + 1) : 2$	
f) $(3 \cdot x) : 5$	

4. Expresa en lenguaje algebraico las siguientes frases:

a) La mitad de un número.	
b) Añadir 5 unidades al doble de un número.	
c) La suma de un número y el doble del mismo.	
d) El área de un triángulo de base b y altura h.	
e) La resta de un número par y su siguiente.	
f) La suma de dos números consecutivos es 21.	
g) Dos números pares consecutivos suman 10.	
h) El producto de tres números consecutivos es 120.	
i) El producto de dos números pares consecutivos es 48.	
j) Unos pantalones y una camisa cuestan en total 72 €. La camisa cuesta 36 € menos que los pantalones.	

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 2: Monomios

Definición: Un monomio es una expresión algebraica formada por:

- **una parte numérica, llamada coeficiente.**
- **una parte literal, formada por letras y sus exponentes.**

Definición: El grado de un monomio es la suma de los exponentes de las letras que lo forman:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$5x$	5	x	1
$6am^2$	6	am^2	3

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal:

$6a^2b^2$ y $-5a^2b^2$ son semejantes

$5x^2y$ y $5xy$ no son semejantes

1. Indica la parte literal y los coeficientes de los siguientes monomios:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-5a^2bx$			
$7xyz^5$			
$\frac{2}{3}x^2z$			
$\sqrt{5}\,xm^2$			
$-ab^2$			
$0{,}5a^2b^2c$			
	-6	x^5z^3	
	$3{,}7$	mp^2o	
10			

	$-\frac{5}{3}$	xy^3z^4	
$-\frac{7}{5}xy^3z^8$			
$2a^2bc$			
	2	a^2bc^3	
xyz^3			
	$\frac{2}{5}$	xy^4z^2	

2. Une con flechas los monomios semejantes de las dos filas:

$-3xyz$	$4a^2bc^3$	$-6r^5st$	$5xy^2z^3$	$7a^2m^4n$

$6xy$	$-5xyz$	$6m^4na^2$	$-4bz^3a^2$	$-6rst$

3. Resuelve las siguientes sumas de monomios y polinomios

a) $2x^2b + 3x^2b - 6x^2b =$
b) $6ab - 7mn + 8ab =$
c) $6x^2 + 12x^2m^2 - 4m^2x^2 =$
d) $5ax^3 - 2ax^3 - 8ax^3 =$

e) $6ab - 12\,a^3b^3 + 8ab + 14a^3b^3 =$
f) $6m^3 + 8m - 4m^3 + 12m =$
g) $7a^5b - 4ab^2 =$
h) $10xm - 6m^4 - 9mx =$
i) $14\,b^6t - 16b^6t + 3b^6t =$
j) $8y^4 - 6y + 10y^4 - 14y =$

4. Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas:

a) $2 \cdot x - 3$, para $x = 7$	
b) $2 \cdot (x - 3)$, para $x = 7$	
c) $x + 2 \cdot y$, para $x = 5{,}5$ e $y = -11{,}3$	
d) $a \cdot x + b : y$, para $a = 4$, $b = -6$, $x = 3{,}6$ e $y = 0{,}5$	

5. Calcula el valor numérico de la expresión:

a) $2x + 1$, para $x = 1$	
b) $2x^2 - 3x + 2$, para $x = -1$	
c) $x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$	
d) $2x^2 - 5x + 1$, para $x = \frac{1}{2}$	

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 3: Operaciones con monomios

– **Producto de monomios: se multiplican los coeficientes por un lado y se suman los exponentes de las potencias con la misma base** $2x^3 \cdot 5x^2 = 10x^5$

– **Cociente de monomios: se dividen los coeficientes por un lado y se restan los exponentes de las potencias con la misma base** $6x^5 : 3x^2 = 2x^3$

1. Efectúa los siguientes productos de monomios:

a) $\frac{4}{5}x^2 \cdot \frac{2}{3}x =$

b) $-5x^3 \cdot 2x^2 =$

c) $\frac{5}{4}xy \cdot \frac{6}{7}x^2y =$

d) $10x^3y \cdot (-6x^3y) \cdot \frac{1}{2}yx^3 =$

e) $\frac{7}{3}ab^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)ab^2 \cdot (-3)ab^2 =$

f) $-3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x\right) =$

2. Efectúa los siguientes cocientes de monomios:

a) $50x^4 : 25x^2 =$

b) $36x^3 : 6x^2 =$

c) $-15x^6 : 3x^7 =$

d) $7x^4 : 3x^3 =$

e) $25x^6 : 10x^2 =$

f) $15x^2 : 6x =$

3. El cociente de dos monomios $P(x) : 5x^3$ es igual a $-3x$. ¿Cuánto vale el monomio $P(x)$?

4. El cociente de dos monomios $6x^4 \cdot Q(x)$ es igual a $2x^3$. ¿Cuánto vale Q(x)?

5. Realiza las multiplicaciones de monomios.

a) $(12x^3) : 4=$

b) $(18x^6\ y^2\ z^5) : (6x^3\ y\ z^2\ ) =$

c) $(36\ x^3\ y^7\ z^{4)} : (12x^2\ y^2) =$

d) $(36y^7) : (12x^2\ y^2) =$

6. Efectúa los productos de monomios.

a) $(2x^3) \cdot (5x^3) =$

b) $(12x^3) \cdot (4x) =$

c) $5 \cdot (2x^2\ y^3\ z) =$

d) $(5x^2\ y^3\ z) \cdot (2\ y^2\ z^2) =$

e) $(18x^3\ y^2\ z^5\ ) \cdot (6x^3\ y\ z^2\ ) =$

f) $(-2x^3\ ) \cdot (-5x\ ) \cdot (-3x^2\ ) =$

7. Realiza las divisiones de monomios.

a) $(12x^3) : (4x) =$

b) $(18x^6\ y^2\ z^5) : (6x^3\ y\ z^2\ ) =$

c) $(36\ x^3\ y^7\ z^{4)} : (12x^2\ y^2) =$

d) $(36\ x^3\ y^7\ z^4): (12x^2\ y^2) =$

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 4: Polinomios. Grado y valor numérico

Definición: Un polinomio es una suma de monomios.

Definición: El grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

- **El grado de un polinomio P(x) es el mayor de los grados de los monomios que lo componen.**
- **El valor numérico de un polinomio es el número que resulta de sustituir la indeterminada x por el número a y efectuar las operaciones indicadas en la expresión del polinomio.**
- **Los exponentes de la variable son números siempre positivos o 0.**

1. Indica el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $3x^3 - 4x + 5x^5 - 3$
Grado:

b) $8x - 4x^2 + 5x^3 + x^6$
Grado:

c) $8xy - 7xyz + 7x^2y + 3$
Grado:

d) $x^6 - 7xy + 6xy - 3$
Grado:

e) $6x^2 - 3xy + y^2$
Grado:

f) $xy - x^2 + 7x$
Grado:

g) $x^6 - 7x^7 + 6x^3 + 1$
Grado:

h) $x^2 - 3x + x^3 - 3$
Grado:

2. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ para $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$, $x = -2$ y $x = 0$.

$P(1) =$

$P(2) =$

$P(-1) =$

$P(-2) =$

$P(0) =$

3. Halla el valor numérico del polinomio $Q(x) = 3x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x + 4$ para $x = 1$, $x = 2$, $x = 0$, $x = -1$ y $x = -2$.

$Q(1) =$

$Q(2) =$

$Q(0) ==$

$Q(-1)$

$Q(-2) =$

4. Halla el polinomio de primer grado tal que su valor numérico para $x = 1$ es -2, y para $x = 0$ es 3.

5. Halla el polinomio de segundo grado tal que el coeficiente del término de mayor grado es 1 y su valor numérico para $x = 1$ es 2 y para $x = 0$ es 6.

6. Indica el valor de a para que los polinomios $P(x) = 2x - 3$ y $Q(x) = 2x + a$ sean iguales.

7. Indica el valor de a para que los polinomios $P(x) = 2x^2 + 9x - 3$ y $Q(x) = 2x^2 + a^2x - 3$ sean iguales.

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 5: Suma y resta de polinomios

- **Para sumar dos polinomios se suman los monomios semejantes:**

  $$\mathbf{(2x^3 - 3x + 5) + (x^3 + 2x^2 + x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x + 5}$$

- **Para restar dos polinomios se suma al polinomio minuendo el opuesto del polinomio sustraendo:**

  $$\mathbf{(6x^3 + 2x^2 - 3x + 1) - (4x^3 - x^2 + 2x + 1) = 6x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - 4x^3 + x^2 - 2x - 1}$$

  $$\mathbf{= 2x^3 + 3x^2 - 5x}$$

1. Siendo $P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x$, $Q(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 4$, calcula:

a) $P(x) + Q(x)=$

b) $P(x) - Q(x) =$

c) $- P(x) + Q(x) =$

d) $- P(x) - Q(x)=$

2. Siendo $P(y) = 2y^2 - 3y^2 + 4y - 5$, $Q(y) = - y^3 + 2y^2 - 2y + 4$ y $R(y) = y^3 + y^2 - 6y + 2$, calcula:

a) $P(y) + Q(y) + R(y) =$

b) $P(y) + [Q(y) - R(y)] =$

c) $P(y) - Q(y) + R(y) =$

d) $P(y) - [Q(y) - R(y)] =$

e) $Q(y) - R(y) - P(y) =$

f) $Q(y) - [R(y) + P(y)] =$

3. ¿Qué polinomio hay que sumar al polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ para que su suma sea $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$?

4. ¿Qué polinomio hay que restar al polinomio $P(x) = 2x^2 - 6x + 1$ para obtener $x^4 - 2x^2 + 6x - 1$?

5. Dados los polinomios $P(x) = -3x^4 - 5x^2 + 1$, $Q(x) = x^3 - 6x + 3$, $R(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 6$ y $S(x) = -x^3 + 6x + 4$, calcula:

a) $[P(x) + Q(x)] - [R(x) + S(x)] =$

b) $[P(x) + S(x)] - [Q(x) + R(x)] =$

c) $[Q(x) - S(x)] - [P(x) - Q(x)] =$

d) $[S(x) - Q(x)] + [P(x) - R(x)] =$

6. Dados $P(t) = 2t^2 - 3t + 4$, $Q(t) = 5t^3 - 2t^2 + 4t - 6$, $R(t) = 3t^3 - 5t + 8$ y $S(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2t - 1$, calcula:

a) $[P(t) + Q(t)] - [R(t) + S(t)] =$

b) $P(t) - [Q(t) - R(t)] - S(t) =$

c) $Q(t) - P(t) + R(t) - S(t) =$

d) $Q(t) + [P(t) - R(t)] - S(t) =$

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 6: Producto de polinomios por un número y por un monomio.

– Para multiplicar un polinomio por un número se multiplica dicho número por cada uno de los monomios del polinomio:

$$(2x^3 + 3x^2 – 2x + 1) \cdot 3 = 6x^3 + 9x^2 – 6x + 3$$

– Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplica dicho monomio por cada uno de los monomios del polinomio:

$$(2x^3+ 3x^2 – 2x + 1) \cdot 3x^2 = 6x^5 + 9x^4 – 6x^3 + 3x^2$$

1. Halla los siguientes productos:

a) $2\cdot(x^4 – 3x^2 + 2x – 1) =$

b) $– 2\cdot(x^4 – 3x^2 + 2x – 1) =$

c) $(x^3 – 2x^2 + x – 1)\cdot 3 =$

d) $2 \cdot (x^3 – 5x^2 + 2x + 5) =$

e) $(x^2 + 5x^2 – 1) \cdot (– 3) =$

f) $– 2 \cdot (x^4 – 3x^2 + 2x – 1) =$

g) $(x^3 – 2x^2 + x – 1)\cdot(– 3) =$

h) $(– x^3 + 2x^2 – x + 1)\cdot 3 =$

i) $(– x^3 + 2x^2 – x + 1)\cdot(– 3) =$

j) $(x^3 + x – 1) \cdot 5 =$

k) $(– x^4 + 3x^2 – 2x + 1) \cdot 4 =$

l) $(– x^3 + 2x^2 – 6x – 1) \cdot (– 4) =$

2. Halla los siguientes productos:

a) $(2x^2)\cdot(x^4 – 3x^2 + 2x – 1) =$

b) $(– 2x^2)\cdot(x^4 – 3x^2 + 2x – 1) =$

c) $(x^3 – 2x^2 + x – 1)\cdot(3x) =$

d) $(x^3 – 2x^2 + x – 1)\cdot(– 3x) =$

e) $(– x^3 + 2x^2 – x + 1)\cdot(3x) =$

f) $(-x^3 + 2x^2 - x + 1)\cdot(-3x) =$

g) $(2x^2) \cdot (x^4 - 3x^2 + 2x - 1) =$

h) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (-3x) =$

i) $(-2x^2) \cdot (x^4 - 3x^2 + 2x - 1) =$

j) $(-x^3 + 2x^2 - x + 1) \cdot (3x) =$

k) $(x^3 - 2x^2 + x - 1) \cdot (3x) =$

l) $(-x^3 + 2x^2 - x + 1) \cdot (-3x) =$

m) $(x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 11x^2 + 12x - 3) \cdot 3x^2$

n) $(x^3 - 2x^2 + 8x - 4) \cdot (-4x) =$

ñ) $(x^3 - x^2 - x - 2) \cdot (-3x^2) =$

o) $(6x^3 - 5x^2 + x) \cdot 2x^3 =$

3. Observa los siguientes productos y completa los términos que faltan:

a) $(\square + 3x^3 - \square - x + \square)\square(3x) = 6x^5 + \square - 6x^3 - \square + 3x$

b) $(2x^5 - \square + 2x^2 + \square - 2)\square(-2x) = \square + 8x^4 - \square - 2x^2 + \square$

c) $(3x^5 + \square - 2x^3 - \square + 4x - \square)\square(-4x^3) = \square - 8x^7 + \square + x^5 - \square + 8x^3$

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 7: Producto de polinomios

– Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por el otro polinomio y se suman los polinomios resultantes:

$(2x^3 - 3x + 1) \cdot (2x^2 - 2) = (4x^3 - 6x + 2) + (4x^5 - 6x^3 + 2x^2) = 4x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 2$

1. Completa la siguiente tabla:

Grado P(x)	**Grado Q(x)**	**Grado P(x)·Q(x)**
1	5	
1		3
	4	5
1		6

2. Halla el producto $P(x) \cdot Q(x)$ para cada uno de los siguientes casos:

$P(x) = 3x^2 + 2x - 3$ $Q(x) = x - 2$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $Q(x) = x^2 - 1$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3$ $Q(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 3x$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = -2x^4 + 3x^2 + 4x - 3$ $Q(x) = -x^2 - 3x + 4$	$P(x) \cdot Q(x) =$

$P(x) = 3x^3 - 2x + 4$ $Q(x) = -2x + 3$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7$ $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 1$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ $P(x) = 6x^3 + 4x^2 - 3x + 4$	$P(x) \cdot Q(x) =$

3. Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 + 6x - 5$, $Q(x) = x^3 - x + 2$ y $R(x) = x^2 - 6x - 1$, calcula:

a) $[P(x) + Q(x)] \cdot R(x) =$

b) $P(x) \cdot R(x) + Q(x) \cdot R(x) =$

c) $[P(x)]^2 =$

d) $[Q(x)]^2 =$

e) $[P(x)]^2 + [Q(x)]^2 =$

f) ¿Cómo son los resultados de los apartados a y b?

4. Completa la siguiente tabla:

Grado P(x)	**Grado Q(x)**	**Grado P(x) · Q(x)**	**Grado $[P(x)]^2$**	**Grado $[Q(x)]^2$**
3		6		
	5	8		
	3		8	
2				6
5	3			

5. Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 2x + 1$ y $R(x) = x^3 - 2x$, calcula:

a) $P(x) \cdot Q(x) - R(x) =$

b) $P(x) \cdot R(x) - Q(x) =$

c) $[P(x)]^2 =$

d) $[Q(x)]^2 =$

e) $[R(x)]^2 =$

f) $[P(x)]^2 \cdot Q(x) =$

g) $[Q(x)]^2 \cdot R(x) =$

h) $[P(x)]^2 - [Q(x)]^2 =$

i) $[Q(x)]^2 - [R(x)]^2 =$

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 8: Identidades notables. Cuadrado de una suma

Cuadrado de una suma: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

En el caso del cuadrado de una suma, los tres términos son positivos.

1. Calcula los siguientes cuadrados de sumas:

a) $(x + 4)^2 =$

b) $(4x + 2)^2 =$

c) $(2x + 4)^2 =$

d) $(x + 1)^2 =$

e) $(2 + 2x)^2 =$

f) $(\frac{x}{2} + 2)^2 =$

g) $(3x + 2)^2 =$

h) $(3 + 3x)^2 =$

j) $(5x + 1)^2 =$

a) $(x + y)^2 =$

b) $(2x + 4)^2 =$

c) $(a^3 + b^2)^2 =$

d) $(6 + b)^2 =$

a) $(x + 2y)^2 =$

$(x^2 + 2)^2 =$

g) $(a + 3b^2)^2 =$

b) $(3x + 6)^2 =$

h) $(3a + x)^2 =$

e) $(\sqrt{x} + 2)^2 =$

c) $(2x + 4)^2 =$

f) $(\frac{x}{2} + 1)^2 =$

i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 =$

2. Completa los términos que faltan en las siguientes expresiones:

$(x + \_\_)^2 = x^2 + \_\_\, x + 49$

$(\_\_ + 5)^2 = x^2 + \_\_\,\_\_ + \_\_\_$

$(\_\_\_ + 3)^2 = \_\_\,\_\_ + 12\, x + \_\_$

$(3x + 5)^2 = 9x^2 + \_\_\,\_\_ + \_\_\_$

a) $(a + 2b^2)^2 = a^2 + \_\_ + 4b^4$

b) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + \_\_$

c) $(y + 3xz)^2 = \_\_ + 6xyz + \_\_$

d) $(x^3 + y^2z)^2 = x^6 + \_\_ + \_\_$

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 9: Identidades notables. Cuadrado de una diferencia

Cuadrado de una diferencia: $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

El término independiente del resultado siempre es positivo, independientemente del signo de 'a' mientras que el signo del doble del primero por el segundo siempre es negativo.

1. Calcula los siguientes cuadrados de diferencias:

a) $(x - 3)^2 =$

b) $(3x - 2)^2 =$

c) $(5x - 4)^2 =$

d) $(x - 2)^2 =$

e) $(2 - x)^2 =$

f) $(\frac{x}{2} - 1)^2 =$

g) $(2x - 2)^2 =$

h) $(-3 - x)^2 =$

i) $(5x - 3)^2 =$

j) $(x - y)^2 =$

k) $(2ax - 4)^2 =$

l) $(a^3 - b^2)^2 =$

m) $(6 - b)^2 =$

n) $(x - y)^2 =$

ñ) $(x^2 - 2)^2 =$

o) $(a^3 - b^2)^2 =$

p) $(3x - 2)^2 =$

q) $(\sqrt{x} - 2)^2 =$

r) $(-3a^2 - x)^2 =$

s) $(2ax - 4)^2 =$

t) $(\frac{x}{2} - 1)^2 =$

u) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 =$

2. Completa los términos que faltan en las siguientes expresiones:

$(x - \_\_)^2 = x^2 \; \_\_ \, x + 49$

$(\_\_ - 5)^2 = x^2 - \_\_ \; \_\_ +$

$(\_\_\_ - 3)^2 = \_\_ \; \_\_ - 12\,x + \_\_$

$(3x - 5)^2 = 9x^2 - \_\_ \; \_\_ + \_\_\_$

a) $(a - 2b^2)^2 = a^2 - \_\_ + 4b^4$

b) $(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + \_\_$

c) $(2y - 3xz)^2 = \_\_ - 12xyz + \_\_$

d) $(x^3 - 3y^2z)^2 = x^6 - \_\_ + \_\_$

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 10: Identidades notables. Suma por diferencia

El signo del término independiente es siempre negativo:

$(x + a)\cdot(x - a) = x^2 - a^2$

1. Calcula los siguientes productos:

a) $(x + y)\cdot(x - y) =$

b) $(3x + 2)\cdot(3x - 2) =$

c) $(x^2 + 2)\cdot(x^2 - 2) =$

d) $(2ax + 4)\cdot(2ax - 4) =$

e) $(\sqrt{x} + 2)\cdot(\sqrt{x} - 2) =$

f) $(\frac{1}{2}x + 1)\cdot(\frac{1}{2}x - 1) =$

g) $(a^3 + b^2)\cdot(a^3 - b^2) =$

h) $(-3a^2 + x)\cdot(3a^2 + x) =$

i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})\cdot(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$

j) $(x+4) \cdot (x-4) =$

k) $(y+3) \cdot (y-3) =$

l) $(2x+3y) \cdot (2x-3y) =$

m) $(7x+y) \cdot (7x-y) =$

n) $(5x+2y) \cdot (5x-2y) =$

ñ) $(x+6y) \cdot (x-6y) =$

o) $(2x^2-3) \cdot (2x^2+3) =$

p) $(5x^2+3y^3) \cdot (5x^2-3y^3) =$

2. Expresa las siguientes diferencias de cuadrados como productos:

a) $p^2 - t^2 =$

b) $4x^2 - 9y^2 =$

c) $c^2 - 16 =$

d) $9x^2 - 1 =$

e) $t^6 - y^4 =$

f) $25x^8 - 16y^6 =$

g) $36x^2 - \dfrac{9}{4} =$

h) $36a^2b^2 - 81b^4 =$

i) $x^4 - x^2 =$

j) $x^4 - 81 =$

k) $x^4a^2 - x^6a^2 =$

l) $4x^6 - 1 =$

m) $\dfrac{81}{4}x^6 - 25x^4 =$

n) $16x^4 - 9 =$

UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA

FICHA 11: Extracción de factor común

Para factorizar sacando factor común: Se extrae el m.c.d. de todos los coeficientes y el monomio de menor exponente. En el lugar en que estaba el monomio de menor exponente se deja solo el coeficiente.

Ejemplo: $25x^4 - 30x^3 + 5x^2 = 5x^2\,(5x^2 - 6x + 1)$

$5x^2$ es el factor común

1. Descompón en producto de factores, sacando el factor común de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x^3 - 4x^2 + 3x =$

b) $x^4a^2 - x^6a^2 =$

c) $x^3 - 4x^2 + x =$

d) $\frac{81}{4}x^6 - 25x^4$

e) $36a^2b^2 - 81b^4 =$

f) $x^4 - x^6 =$

g) $x^4 - x^2 =$

h) $6xy + 54x^2y - 3xy^2 =$

i) $4x^2 - 6x + 2x^3 =$

j) $3x^3y - 9xy^2 + 27x^4y^3 =$

k) $5y^2x - 15yx^2 + y^3x^4 =$

l) $6x^2y^2 - 9x^3y^6 + 27xy^3 =$

m) $4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 2x^4y =$

n) $3x^5y^4 + 9x^2y^3 - 3xy + 3y =$

ñ) $16x^2y^2 + 4xy^3 - 28x^3y^3 =$

o) $\frac{1}{4}xz^3 + \frac{1}{6}x^2z^5 - \frac{1}{10}x^3z^2 =$

p) $12x^4y^2 + 6x^2y - 15x^3y =$

q) $-3xy - 2xy^2 - 10x^2yz =$

r) $2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3 =$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 1: Trasposición de términos

CONCEPTO Y PARTES DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO:

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Por ejemplo: 2x + 1 = 7 $\begin{cases} 2x+1 & \rightarrow \quad 1^{er} \text{ miembro} \\ 7 & \rightarrow \quad 2^{o} \text{ miembro} \end{cases}$

Si al sustituir la x por un número se cumple la igualdad, entonces dicho número es una solución de la ecuación.

La solución de la ecuación anterior es 3 porque 2 · 3 + 1 = 7

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO:

Para resolver ecuaciones de primer grado debes seguir los siguientes pasos:

- **Trasposición de términos: Pasamos todas las “x” a un lado y lo que no tiene “x” al otro lado de la igualdad según la REGLA DE LA SUMA (lo que suma en un miembro pasa restando al otro miembro y viceversa)**
- **Reducimos términos: Sumamos en cada miembro los monomios semejantes.**
- **Despejamos la “x” según la REGLA DEL PRODUCTO: lo que está multiplica en un miembro pasa dividiendo al otro miembro y viceversa.**

Ejemplo:

	$5x+4-3x=6-2x$
Paso 1: Trasponemos términos	$5x-3x+2x=6-4$
Paso 2: Reducir términos semejantes	$4x=2$
Paso 3:Despejar la incógnita y simplificamos	$x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

1. Resuelve las ecuaciones siguiendo los pasos anteriores:

$x + 3 = 7$	$x - 5 = 2$	$3x = 9$	$\frac{2x}{4}=3$

2. Resuelve las ecuaciones siguiendo los pasos anteriores

$\frac{3x}{4}=9$	$2x-1=5$	$7=4x-5$	$5x+2=4$
$3x+2=14$	$3x=10+x$	$3=2x-5$	$7x-4=2-2x$
$\frac{2x}{5}=8$	$3x-10=2$	$6=2x-4$	$-x+2=4$
$x+12=4$	$5x=12+x$	$13=-x+5$	$4x-6=2+2x$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 2: Resolución de ecuaciones sencillas

1. Resuelve paso a paso:

$2x - 4 = 3 + x$	$5x - 4 - 4x = 2x - 3 + 3x$	$3x + 5 = 2x - 2$
$2x - 3 + 5x = x - 1 - 2x$	$4x - 8 + 3x = 5x + 10 - 4x$	$x + 2 - 6x = x - 9 + 5x$
$2 - 3x + 5 = x - 5 - 7x$	$x = 2x - 3 + 3x$	$x - 2 - 6x = x - 7 + 5x$
$5x - 2 + 3x = 4 - 2x + 1$	$-2x + 1 - 2x = 6 + 3x - 4$	$x + 3 - 3x = -x - 2 + 2$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 3: Resolución de ecuaciones con paréntesis.

Se quitan los paréntesis aplicando la propiedad distributiva:

Ejemplo: 2 · (3x – 2) = 8

6x – 4 = 8

6x = 12

x = 2

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

$9-3\cdot(2x-1)=0$	$3\cdot(4x+3)=4x+15$
$3\cdot(4-x)=18x+5$	$x-3\cdot(2x-6)=3$
$12x-4\cdot(x-3)-3x=3(3x-1)+3$	$-2\cdot(2x-1)+21=5(2x-2)+9$
$10-5(3x+7)-(2x-3)=-4x-4(1+x)$	$x-2\cdot(2-3x)=17$

$7(5x-3)-9x=-(-3x-8)+3(5x+1)$	$5x+3(2x-3)=8-4(5-2x)+2x$
$7-6(4x-2)+5x=8x-2(1+3x)$	$2x-2\cdot(2x-5)=x-1$
$6\cdot(x-2)+5x=4(x-3)$	$3x-4+x=2(x+6)$
$2(x-3)=-x+3$	$2\cdot(2x+1)=-(x+3)+3$

$12-(4x-6)=5x$	$-2\cdot(x+6)+2=-4-(10-2x)$
$4\cdot(x+3)-(1-x)=1$	$2\cdot(x-1)-(x+1)=1$
$3\cdot(2x-5)+x=-3(x-3)-(x+1)$	$2\cdot(2x+5)-5=5x+2\cdot(4-x)+1$
$2\cdot(3x-1)-x=-2(x-1)-3(x+1)$	$4\cdot(x-2)+10=3x+2(4-x)+2$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 4: Resolución de ecuaciones con denominadores

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

$\frac{x+2}{3}=5x-4$	$\frac{x}{5}+2=x-4-\frac{x}{2}$ a)
$\frac{3x}{2}+20=x+25$	$\frac{x}{4}+3=2x-\frac{3x}{2}$ b) c)
$\frac{3x}{5}+7=2x$	$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{11}{6}$

$x-\frac{3x}{4}+\frac{1}{10}=\frac{4x}{5}-\frac{x}{2}$	$\frac{3x}{2}+10=4x$
$\frac{x}{2}-3=x-7$	$x+\frac{5x}{6}-25=50-\frac{x}{4}$
$3+\frac{2x+1}{3}=4x-\frac{2x-5}{6}-\frac{1}{2}$	$\frac{2x-3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2x+11}{10}-\frac{3x-1}{2}$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 5: Resolución de ecuaciones con paréntesis y denominadores

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

$2\left(\frac{x+5}{3}\right)=x-2$	$\frac{1}{2}\cdot(2x-3)-x=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}(3x-1)-\frac{5}{6}=\frac{x}{2}$	$4-\frac{x+3}{6}=2+\frac{9-2x}{3}$

$\frac{3\cdot(x+1)}{5}=\frac{2\cdot(x-2)+5}{3}$	$\frac{x}{2}-2\cdot(x-1)=\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$
$\frac{2x-3}{6}-3x=\frac{2}{3}-\frac{3x-6}{6}$	$\frac{3x-7}{6}+\frac{2x-5}{9}=1-\frac{x+4}{2}$

$\frac{4x+5}{5}-\frac{6x-2}{3}=\frac{3x+4}{15}$	$\frac{3\cdot(x-1)}{2}-3x=\frac{13}{5}-2\cdot(x+2)$
$4\cdot\frac{2x+10}{6}=2x-4$	$\frac{2(x+5)}{3}-2+3x=\frac{2x+11}{10}$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 6: Problemas de números

PASOS PARA RESOLVER UN PROBLEMA

Para resolver un problema es conveniente realizar cuatro fases:

1ª. Comprender el problema: Hay que leer el problema hasta familiarizarse con él y que podamos contestar, sin dudar, a las siguientes preguntas:

> **¿Cuáles son los datos?, ¿cuál es la incógnita o incógnitas?, ¿son las condiciones suficientes para determinar las incógnitas?, ¿son insuficientes?.. .**

2ª. Concebir un plan: Determinar la relación entre los datos y las incógnitas. Escribir la ecuación que relacionan los datos con la incógnita.

3ª. Ejecutar el plan: Resuelve la ecuación.

4ª. Examinar la solución obtenida: Comprobar si las soluciones obtenidas son válidas y proceder en consecuencia.

Observación: Recuerda que, si no sabes resolver el problema que te plantean, puedes intentar resolver uno similar con los datos más fáciles.

1. Si al cuádruplo de un número le quitas cinco unidades, obtienes 59. ¿Cuál es ese número?

2. Si a la tercera parte de un número le sumas tres, obtienes el mismo resultado que si le restas uno y divides entre dos. ¿Cuál es ese número?

3. La suma de dos números consecutivos es 49. ¿Cuáles son esos números?

4. Un número y su siguiente suman 125. ¿Cuáles son esos números?

5. Un número y su anterior suman 77. ¿Qué números son?

6. La suma de tres números consecutivos es igual a 66. Calcula esos números.

7. La suma de un número par y el siguiente par que le sigue es igual a 66, ¿qué números son?

8. Averiguar un número si sabemos que el triple de dicho número menos su mitad da treinta unidades

9. El triple de un número más su tercera parte es 70. ¿Qué número es?

10. Un número disminuido en su tercera parte equivale al doble del número disminuido en 3. ¿Cuál es el número?

11. Un número excedido en 8 es igual a su doble excedido en 32. ¿Cuál es el número?

12. Calcula el número natural que sumado a su siguiente da 157.

13. Calcula dos números impares consecutivos tales que la suma es 36.

14. Si a un número le sumo el doble del siguiente me da 14. ¿Qué número es?

15. Un muchacho le dijo a otro: “adivina cuántos años tengo si las dos terceras partes de ellos menos 1 es igual a mi edad actual menos 6”.

16. Si a un número le quito la mitad de dicho número y después le sumo la tercera parte me da 1. ¿Qué número es?

17. Halla tres números pares consecutivos cuya suma sea 24.

18. Tres veces la suma de un número más 5 es igual a 21. Halla los números.

19. La suma de un número, de su doble, de su triple, de su cuádruple, menos 3 es 67. ¿Cuál es ese número?

20. La suma de 4 múltiplos de 3 consecutivos es 78. ¿Qué números son?

21. La suma de 5 números pares consecutivos es igual a 120. ¿De qué números se trata?

22. La suma de cuatro números es 90. El segundo número es el doble del primero; el tercero doble del segundo; y el cuarto el doble del tercero. Halla los cuatro números.

23. Si la diferencia de dos números es 10 y el menor es la sexta parte del mayor. ¿Cuál es el valor de cada número?

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 7: Problemas de edades

1. Un padre tiene 34 años, y su hijo, 12. ¿Al cabo de cuántos años la edad del padre será el doble que la del hijo?

2. Beatriz dice: si al doble de los años que tengo le restas la mitad de los que tenía hace un año, el resultado es 20. ¿Qué años tiene Beatriz?

3. Antonio tiene ahora 8 años más que su primo pequeño, pero dentro de 4 años la edad de Luis será el doble de la de su primo. ¿Cuántos años tiene cada uno?

4. María tiene 10 años más que su hermana. Dentro de 6 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada una?

5. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo y dentro de 13 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

6. La edad de una madre es siete veces la de su hija. Si la madre es 24 años mayor que la hija. Averigua las edades de ambas.

7. Un padre dice de la edad de su hijo: Las $\frac{3}{4}$ partes de su edad hace tres años más el doble de la edad que tendrá dentro de 2 años es igual a mi edad que son 40 años.

8. La edad de un padre es cuatro veces la de su hijo, pero dentro de 18 años sólo será el doble, ¿qué edad tiene el hijo en la actualidad?

9. Jaime tiene 1 año más que Beatriz, que tiene el doble de edad que su hermano pequeño. Entre los tres tienen 26 años. Calcula la edad de cada uno.

10. Las edades de dos niños suman 14 años. Y dentro de 2 años, uno tendrá la edad que el otro. ¿Cuál es la edad de cada uno de los niños?

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 8: Problemas de mezclas y variados

1. ¿Qué cantidades de café, uno de 14 euros/kg y otro de 12 euros/kg, hay que mezclar para que resulten 25 kg de mezcla de café a 13’2 euros/kg?

2. Un ganadero quiere mezclar cierta cantidad de maíz de 2’8 euros el kilo, con 300 kilos de cebada de 2’2 euros el kilo, para obtener un pienso para gallinas que resulte a 2’6 euros el kilo. ¿Qué cantidad de maíz necesitamos?

3. “Se han mezclado dos clases de café de 3’05 €/kg y 5’7 €/kg resultando una mezcla de 8 kg y 4’55 €”. ¿Cuantos kilos de cada café hay que mezclar?

4. ¿Qué cantidades de dos clases de aceite, uno de 3’9 euros/litro y otro de 1’4 euros/litro, hay que mezclar para obtener 50 litros de mezcla a 2’5 euros/litro?

5. Ana tiene el doble de lápices de colores que Julio. Julio tiene 10 lápices menos que Cristina. Pedro tiene 13 lápices más que Julio. Entre todos tienen 88 lápices. ¿Cuántos tiene cada uno?

6. En una cafetería nos cobran por dos cafés y un refresco 2’5 euros y por un café y tres refrescos pagamos 3’5 euros. ¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?

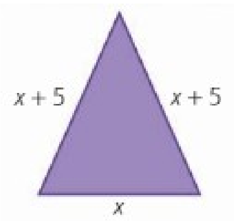
7. En un bar hay 31 personas. Sabiendo que hay 5 hombres más que mujeres, ¿cuál es el número de hombres y mujeres que hay en el bar?

8. "Un zorro, un mapache y un perro pasan por la aduana y entre los tres pagan 112 monedas de un euro. El mapache le dice al perro: Tu maleta pesa el doble que la mía, así que tendrás que pagar el doble que yo. Y eso mismo le dice el zorro al mapache." ¿Cuánto paga cada uno?

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 9: Problemas geométricos

1. En un triángulo isósceles cada uno de los lados iguales mide 5 cm más que el tercer lado. Si tiene 70 cm de perímetro, ¿cuánto mide cada lado?



2. Calcula lo que miden los lados de un triángulo cuyo perímetro es de 18 cm, si sabemos que el segundo lado es el doble que el primero, y el tercer lado 2 cm menos que el segundo.

3. La diferencia entre los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 70º. ¿Cuánto mide cada ángulo?

4. Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que el largo es 15 metros mayor que el ancho y que el perímetro de la parcela es de 110 metros.

5. En un triángulo rectángulo, la diferencia entre los dos ángulos agudos es de 40º. Calcula la medida de cada ángulo.

6. Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que el lado mayor es 100 metros más largo que el lado menor y que el perímetro es de 1800 metros.

7. En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 3 cm más que cualquiera de los dos lados iguales. El perímetro del triángulo mide 39 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

8. Un terreno de forma rectangular tiene un perímetro de 105 metros. Si el ancho es la mitad, ¿cuáles son las medidas del terreno?

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 10: Ecuaciones de segundo grado completas

La forma general de una ecuación de 2º grado es: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$.

La solución de esta ecuación general viene dada por la fórmula:

Ejemplo: Resuelve la ecuación de segundo grado: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones usando la fórmula anterior.

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$2x^2 - 5x + 3 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x^2 - 6x - 7 = 0$
$9x^2 + 6x + 1 = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$8x^2 - 6x + 1 = 0$
$4x^2 - 4x + 1 = 0$
$-6x^2 + 5x + 1 = 0$

$$\frac{x^2-1}{3}=\frac{x^2-2x+1}{2}$$

$$\frac{x^2-1}{3}=\frac{x^2-2x+1}{2}$$

$$x\cdot(x+1)-4=3x-1$$

$$x\left(5x+\frac{9}{2}\right)=4x\cdot(x+1)+\frac{1}{2}$$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 11: Ecuaciones de segundo grado incompletas

Si c = 0, la ecuación se reduce a: $ax^2 + bx = 0$.

Podemos sacar factor común x y tenemos: $x\cdot(ax+b)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-b}{a} \end{cases}$

Este tipo de ecuación siempre tiene dos soluciones.

Ejemplo: Resuelve la ecuación de segundo grado: $3x^2 - 5x = 0$

$$3x^2 - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(3x-5)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Si b = 0 la ecuación se reduce a: $ax^2 + c = 0$.

Podemos despejar directamente x: $x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Puede tener dos soluciones opuestas o ninguna solución, dependiendo de que el radicando sea o no positivo.

Ejemplo: Resuelve la ecuación de segundo grado: $4x^2 - 16 = 0$

$$4x^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

$x^2 = 36$	$3x^2 - 12 = 0$
$x^2 - 3x = 0$	$2x^2 = 32$

$2x^2 - 200 = 0$	$x^2 - 5x = 0$
$4x^2 = 36$	$x^2 - 15 = 66$
$49 - x^2 = 0$	$5x^2 = 80$
$2x^2 = 50$	$2x^2 - 6x = 0$
$5x^2 - x = 0$	$2x \cdot (x-3) = 3 \cdot (x^2 + 2x)$

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES.

FICHA 12: Problemas de ecuaciones de segundo grado

1. El producto de dos números pares consecutivos es 80. ¿Cuáles son esos números?

2. Busca dos números consecutivos cuyo producto sea 272.

3. Si a un número aumentado en tres unidades se le multiplica por ese mismo número disminuido en tres unidades, se obtiene 216. ¿De qué número se trata?

4. Juan dice que si añade 3 años a su edad y lo eleva al cuadrado, el resultado es 225. ¿Cuántos años tiene Juan?

5. El precio de una camiseta es $\frac{3}{4}$ del precio de una camisa y el producto de los precios de ambas prendas es de 972 euros. ¿Cuál es el precio de cada una?

6. Si se disminuye el lado de un cuadrado en 3 metros, su área disminuye en 45 m^2. ¿Cuánto mide el lado?

7. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su base mide 3 metros más que su altura y que su superficie es de 54 m^2.

8. El perímetro de un rectángulo es de 54 metros y su superficie es de 180 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

9. Halla la altura de un triángulo equilátero de lado 10 dm.

10. Un rectángulo tiene de diagonal 25 cm y de altura 15 cm. Averigua la base y el área.

11. Un triángulo isósceles tiene de base 8 cm y de altura 12 cm, Averigua el perímetro.

12. Un rombo tiene de diagonal 16 y 12 dm respectivamente. Averigua el lado, el perímetro y el área.

13. Calcula el radio de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 6 cm, el área se hace nueve veces más grande.

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 1: Representación gráfica de funciones lineales dando valores.

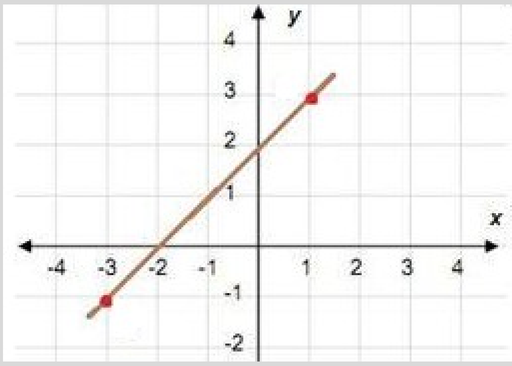
La expresión algebraica "y = mx + n" es una "función lineal", y se representa mediante una recta donde "m" es la "pendiente" de la recta y "n" es la "ordenada en el origen".

Para representar "rectas", damos valores a la variable "x" y calculamos el valor de la variable "y".

Ejemplo:

y = x + 2

x	y
0	**2**
1	**3**
– 1	**1**
– 2	**0**
– 3	**– 1**



1. Calcula los valores en las siguientes funciones lineales:

y = x

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = x + 4

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 2x + 4

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 1 – 2x

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 5 – x

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 3x – 1

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 3x + 2

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y = \frac{x+1}{2}$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y = \frac{2x-1}{2}$

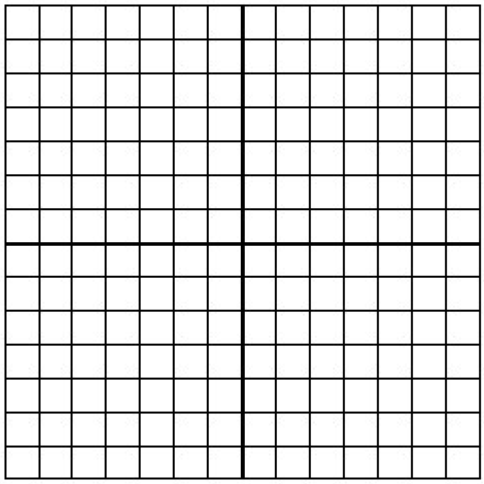
x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y = \frac{x+2}{3}$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

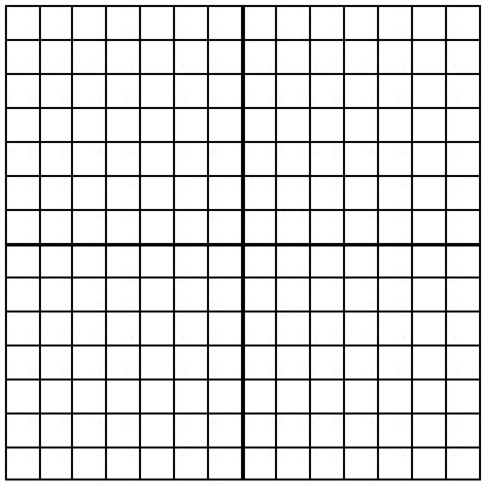
2. Representa sobre los ejes de coordenadas la recta de ecuación y = x – 1 calculando los valores de la y:

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

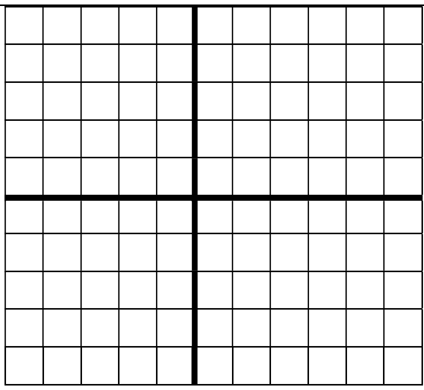
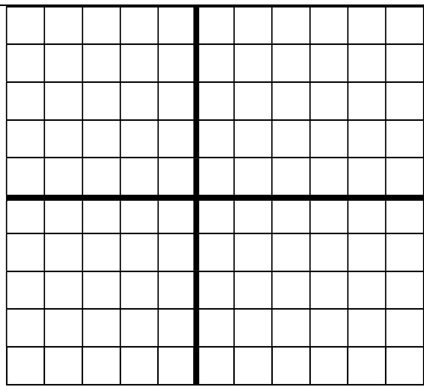
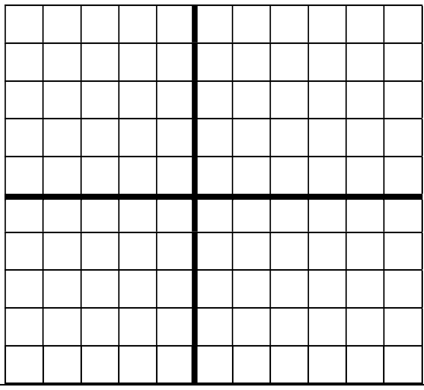
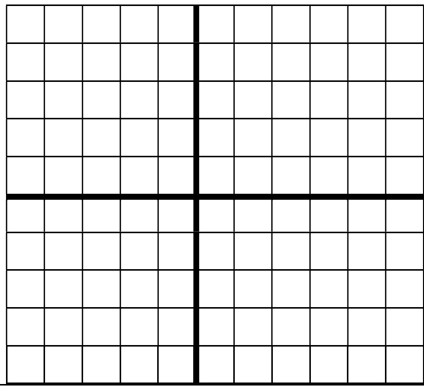
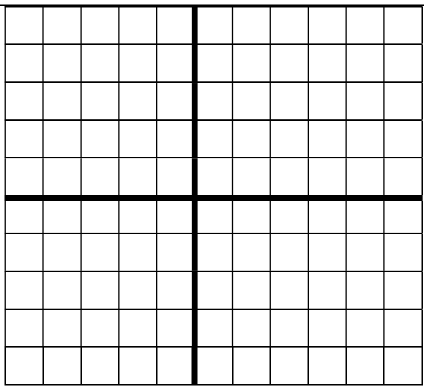
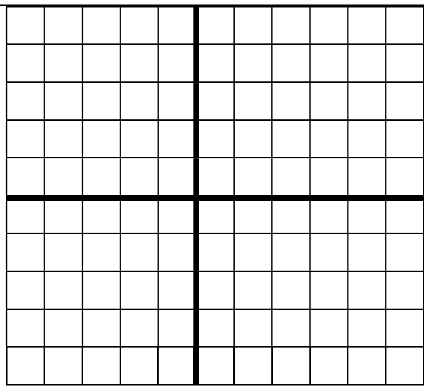
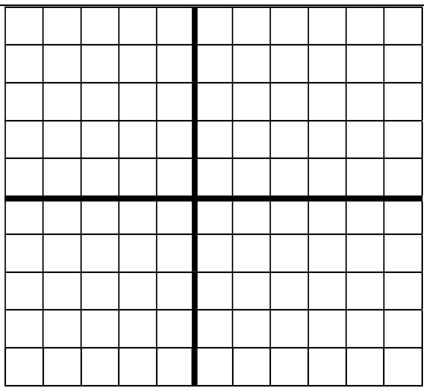
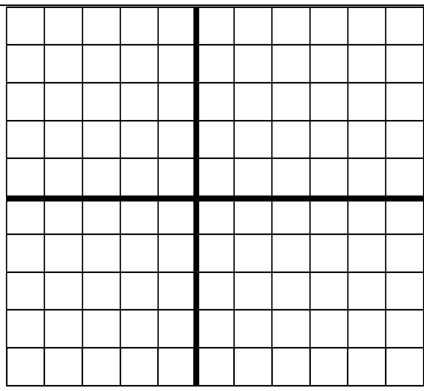


3. Representa sobre los ejes de coordenadas la recta de ecuación y = 2 – x calculando los valores correspondientes de la y:

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	



4. Representa las siguientes rectas sobre los ejes de coordenadas:

$y = 2x - 1$ 	$y = 3x + 1$ 
$y = 1 - x$ 	$y = 1 - 2x$ 
$y = 3x + 2$ 	$y = 2 - 2x$ 
$y = x + 5$ 	$y = 5 - 2x$ 

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 2: Interpretación geométrica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método GRÁFICO, seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1: Despejamos la incógnita "y" en las dos ecuaciones.

Paso 2: Construimos una tabla de valores para cada función.

Paso 3: Representamos las dos funciones en los mismos ejes de coordenadas.

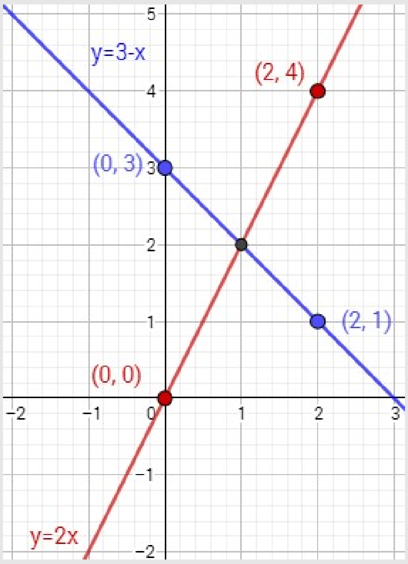
Paso 4: El punto donde se cortan las dos rectas es la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} y-2x=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-2x=0 \\ x+y=3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y=2x \\ y=3-x \end{matrix}$$

y = 2x	
x	y
– 2	– 4
– 1	– 2
0	0
1	2
2	4

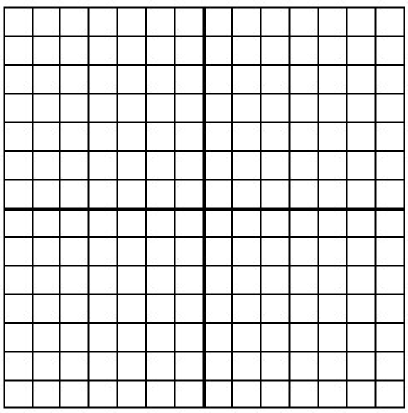
y = 3 – x	
x	y
– 2	5
– 1	4
0	3
1	2
2	1



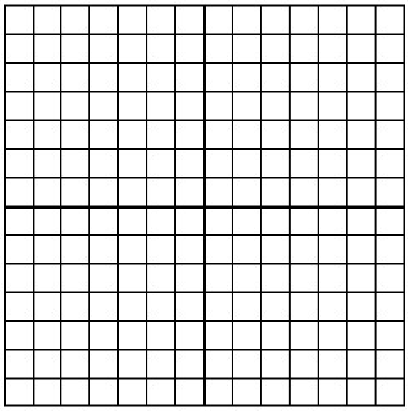
La solución es el punto donde se cortan en este caso x = 1, y = 2.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método gráfico:

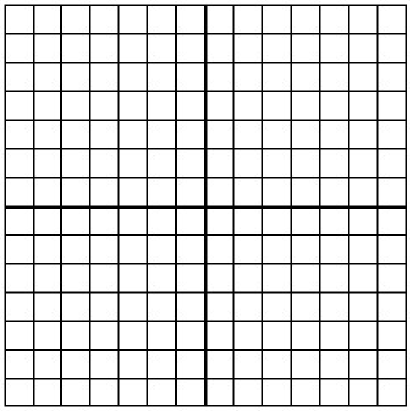
$$\begin{cases} y=3x-1 \\ 5x+2y=9 \end{cases}$$



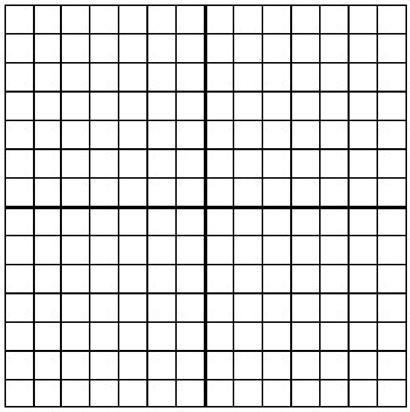
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$



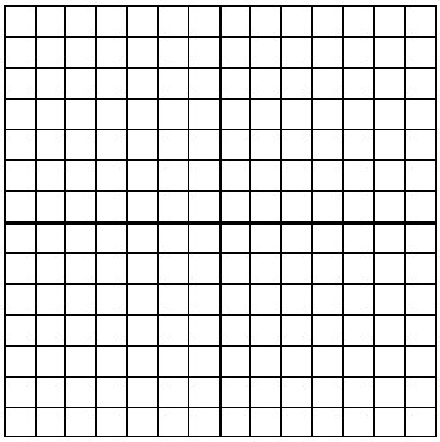
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$



UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 3: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por sustitución.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de SUSTITUCIÓN, seguiremos los siguientes pasos:

PASO 1: Se despeja una incógnita en la ecuación que queramos

PASO 2: Se sustituye en la otra ecuación y se hacen las operaciones hasta que quede una ecuación

PASO 3: Se resuelve la ecuación

PASO 4: El valor obtenido se sustituye la expresión obtenida en el paso 1

PASO 5: Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema

EJEMPLO

$$\begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{-5+3y}{2} \quad \Rightarrow \quad 7 \cdot \frac{-5+3y}{2} - 5y = 10$$

$$\frac{-35+21y}{2} - \frac{10y}{2} = \frac{20}{2}$$

$$-35 + 21y - 10y = 20$$

$$21y - 10y = 35 + 20$$

$$11y = 55 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{55}{11} = 5$$

$$x = \frac{-5+3y}{2} \qquad x = \frac{-5+3\cdot 5}{2} = \frac{-5+15}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución siguiendo los pasos del ejemplo

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 8 \\ 2y - 5x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x} = 5 - \mathrm{y} \\ 2\mathrm{x} + \mathrm{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 5x - 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$$

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 4: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por igualación.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de IGUALACIÓN, seguiremos los siguientes pasos:

PASO 1: Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

PASO 2: Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

PASO 3: Se resuelve la ecuación.

PASO 4: El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

PASO 5: Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 10 + 5y \\ x = -5 + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10+5y}{7} \\ x = \dfrac{-5+3y}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{10+5y}{7} = \frac{-5+3y}{2}$$

$$\frac{20+10y}{14} = \frac{-35+21y}{14}$$

$$20 + 10y = -35 + 21y$$
$$20 + 35 = 21y - 10y$$
$$55 = 11y \Rightarrow \frac{55}{11} = y \Rightarrow y = 5$$

$$x = \frac{10+5y}{7} = \frac{10+5\cdot 5}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

PASO 5: La solución del sistema es: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación siguiendo los pasos del ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y = 1 \\ 2x - 7y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 5x + 2y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 5y = 3 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 5x - 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 5: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por Reducción.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de REDUCCIÓN, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1: Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

Paso 2: La restamos, y desaparece una de las incógnitas.

Paso 3: Se resuelve la ecuación resultante.

Paso 4: El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iníciales y se resuelve.

Paso 5: Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 7x-5y=10 \\ 2x-3y=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-7) \end{array} \left.\begin{array}{r} 14x-10y=20 \\ -14x+21y=35 \end{array}\right\} \text{ Sumamos las dos ecuaciones}\cdot$$

$$0x+11y=55 \Rightarrow y=\frac{55}{11}=5$$

$$\begin{array}{l} 7x-5y=10 \\ 7x-5\cdot 5=10 \\ 7x-25=10 \\ 7x=10+25 \\ x=\frac{35}{7}=5 \end{array}$$

PASO 5: La solución del sistema es: $\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción siguiendo los pasos del ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+2y=10 \\ x-2y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$
$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ x + y = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 5x - 3y = 5 \end{cases}$
$\begin{cases} -3x + 4y = 19 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 5x - 2y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 6x + 5y = -28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 6: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales no inmediatos.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones indicando los pasos hasta llegar a un sistema sencillo y resuélvelo por el método que desees:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=7 \\ 3x-2y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3=5y \\ 2(x-3y)+x=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3(y+2)=4 \\ 5(x-1)+2y=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(2-x)+4(y+2)=0 \\ \dfrac{3x}{4}-\dfrac{2y-1}{2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(2x-y)+2x=3(x-2)+9 \\ 4(x-1)+y=2(2y-1)-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(1-x)=5(2x-y)-5 \\ \dfrac{x-y}{3}=\dfrac{x-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(-2x+y)=4(2y-2) \\ \dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3y-2}{4}=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3x+y)+x=6(x+1)+4 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{2y}{3}=3x-3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x-1)=2(y+6)-3 \\ 3(2x-1)+4=\dfrac{3y-3}{3}+16 \end{cases}$$

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 7: Problemas variados.

PASOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE SISTEMAS

Ejemplo .. Alejandra tiene 27 años más que su hija Carmen. Dentro de 8 años, la edad de Alejandra doblará a la de Carmen. ¿Cuántos años tiene cada una?

Solución. En este problema indicaremos con detalle las 4 fases

1º. Comprender el problema.

Es un problema con dos incógnitas y dos condiciones, luego suficientes para poder determinarlas.

Llamamos x a la edad de Alejandra e y a la de su hija.

Ordenamos los elementos del problema:

	Hoy	***dentro de 8 años***
La madre	x	$x + 8$
La hija	y	$y + 8$

2º. Concebir un plan.

Escribimos las ecuaciones que relacionan los datos con las incógnitas:

$x = 27 + y$

$x + 8 = 2(y + 8)$

Es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Lo resolveremos por el método de sustitución.

3º Ejecutar el plan.

$x = 27 + y$

Entonces:

$27 + y + 8 = 2(y + 8)$ **de donde** $35 - 16 = y$ $y = 19$, $x = 46$

4º Examinar la solución obtenida .La solución obtenida es factible por ser entera.

1. La suma de dos números es 66 y su diferencia es 8. ¿Cuáles son esos números?

2. Calcula dos números de forma que su diferencia sea 5 y la suma del primero con el doble del segundo sea 35.

3. En una cafetería nos cobran por dos cafés y un refresco 2’5 euros y por un café y tres refrescos pagamos 3’5 euros. ¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?

4. Un granjero tiene 12 caballos de 9 y 11 años. La suma de sus edades es 122 años. ¿cuántos caballos son de cada edad?

5. Loreto y Sandra visitan una granja de gallinas y cerdos. Tras la visita Loreto dice “he contado 460 patas y 180 cabezas”. ¿Cuántos cerdos y gallinas había en la granja?

6. En el recreo de ayer, con 9 € compramos 6 bocadillos de tortilla y uno de chorizo. Hoy, con 10 € hemos comprado 4 de chorizo y 3 de tortilla y han sobrado 0’25 €. ¿Cuál es el precio de cada tipo de bocadillo?

7. En una clase de 4º ESO hay 25 alumnos. Un día que 5 chicas y 2 chicos van a una visita cultural la clase queda con el doble de chicos que de chicas. ¿Cuántos alumnos y cuántas alumnas tiene la clase?

8. En un campamento de verano hay tiendas dobles y triples. Si en total hay 20 tiendas y 52 sacos de dormir, ¿cuántas tiendas hay de cada clase?

9. En un bar hay 31 personas. Sabiendo que hay 5 hombres más que mujeres, ¿cuál es el número de hombres y mujeres que hay en el bar?

10. Un trabajador gana 40 euros en un turno de día y 75 euros en un turno de noche. En un mes ha hecho 22 turnos en total y ha ganado 1 300 euros. ¿Cuántos turnos de día ha hecho? ¿Y de noche?

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 8: Figuras geométricas

1. El área de un triángulo rectángulo es $6m^2$ y sabemos que su hipotenusa mide 5m. Calcula la longitud de los dos catetos que forman la base y la altura.

2. La diferencia entre los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 70º. ¿Cuánto mide cada ángulo?

3. El área de un rectángulo es 40 cm^2. Si al lado mayor se le quitan 2 cm y al lado menor se le aumenta 1 cm el rectángulo se transforma en un cuadrado. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

4. El perímetro de un rectángulo mide 28 cm y su área es 48 cm^2. Calcula su base y su altura.

5. Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que el largo es 15 metros mayor que el ancho y que el perímetro de la parcela es de 110 metros.

6. Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que el lado mayor es 100 metros más largo que el lado menor y que el perímetro es de 1800 metros.

7. En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 3 cm más que cualquiera de los dos lados iguales. El perímetro del triángulo mide 39 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

8. En un rectángulo el área mide 20 dm^2 y su perímetro 18 dm. Cuáles son sus dimensiones.

9. La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 9: Problemas de mezclas y variados

1. ¿Qué cantidades de café, uno de 14 euros/kg y otro de 12 euros/kg, hay que mezclar para que resulten 25 kg de mezcla de café a 13’2 euros/kg?

2. Para una fiesta con unos amigos, Pedro ha comprado avellanas de 8 euros/kilo y almendras de 12 euros/kilo. La mezcla pesaba 4 kilos y el coste total ha sido de 42 euros. Calcula la cantidad que compro de cada producto

3. Con dos clases de café de 9 €/kg y 12 €/kg se quiere obtener una mezcla de 10 €/kg. Halla la cantidad que hay que mezclar de cada clase para obtener 30 kg.

4. ¿Qué cantidades de dos clases de aceite, uno de 3’9 euros/litro y otro de 1’4 euros/litro, hay que mezclar para obtener 50 litros de mezcla a 2’5 euros/litro?

5. "Se han mezclado dos clases de aceite de 3'05 €/litro y 5,7 €/litro resultando una mezcla de 8 litros y 4'55 €". ¿Cuántos litros de cada tipo tenemos que mezclar?

6. Un ganadero quiere mezclar cierta cantidad de maíz de 2'8 euros el kilo, con 300 kilos de cebada de 2'2 euros el kilo, para obtener un pienso para gallinas que resulte a 2'6 euros el kilo. ¿Qué cantidad de maíz necesitamos?

7. "Se han mezclado dos clases de café de 3'05 €/kg y 5'7 €/kg resultando una mezcla de 8 kg y 4'55 €". ¿Cuántos kilos de cada café hay que mezclar?

8. ¿Qué cantidades de dos clases de aceite, uno de 3'9 euros/litro y otro de 1'4 euros/litro, hay que mezclar para obtener 50 litros de mezcla a 2'5 euros/litro?

UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.

FICHA 10: Problemas de edades

1. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo y dentro de 13 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

2. Halla las edades de dos hermanos sabiendo que se diferencian en tres años y que el mayor tiene nueve años menos que el doble de la edad del pequeño.

3. La edad de una mujer era hace 10 años cinco veces la de su hija, y dentro de 11 años será solamente el doble. ¿Qué edades tienen actualmente?

4. El doble de la edad de Ana es igual al triple de la de su hermana pequeña. Hace cuatro años la edad de Ana era el doble de la de su hermana. ¿Cuántos años tienen?

5. María tiene 10 años más que su hermana. Dentro de 6 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada una?

6. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo y dentro de 13 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

7. La edad de una madre es siete veces la de su hija. Si la madre es 24 años mayor que la hija Averiguar las edades de ambas.

8. La edad de un padre es cuatro veces la de su hijo, pero dentro de 18 años sólo será el doble ¿qué edad tiene el hijo en la actualidad?

UNIDAD DIDACTICA 9: TEOREMA DE PITÁGORAS

FICHA 1: Reconocimiento de triángulos rectángulos a partir de las medidas de sus lados.

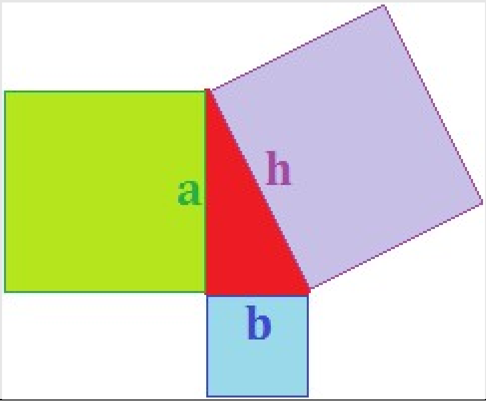
Definición: Un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto

Definición: La Hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.

El teorema de Pitágoras permite calcular la longitud de un lado cualquiera de un triángulo rectángulo, conocidas las longitudes de los otros lados.

TEOREMA DE PITÁGORAS: La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$\boxed{(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto1})^2 + (\text{Cateto2})^2}$$



Dado un triángulo rectángulo, siendo "a" el lado mayor:

- **Si $a^2 = b^2 + c^2$ es rectángulo**
- **Si $a^2 < b^2 + c^2$ es acutángulo**
- **Si $a^2 > b^2 + c^2$ es obtusángulo**

1. Determina si un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm, es rectángulo.

2. Indica si los triángulos con estas medidas son rectángulos, acutángulos u obtusángulos:

a. 10 cm, 11 cm, y 20 cm	**b.** 4 cm, 5 cm y 6 cm	**c.** 48 cm, 55 cm, y 73 cm

3. Clasifica en función de sus ángulos, los siguientes triángulos de lados:

1. 5 m, 12 m, y 13 m	**2.** 9 m, 12 m y 15 m
3. 7 m, 11 m y 14 m	**4.** 8 m, 13 m y 15 m

4. Determina si las siguientes ternas de números se corresponden con ternas pitagóricas:

4 cm, 6 cm y 8 cm	10 cm , 14 cm y 12 cm
8 cm , 6 cm y 10 cm	15 cm , 25 cm y 20 cm

UNIDAD DIDACTICA 9: TEOREMA DE PITÁGORAS

FICHA 2: Cálculo de la hipotenusa conociendo los catetos.

1. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulos cuyos catetos miden 3 y 4 m respectivamente.

2. Sobre un campo rectangular, de 16 m de longitud y 12 m de ancho, se traza una diagonal. Calcula su longitud

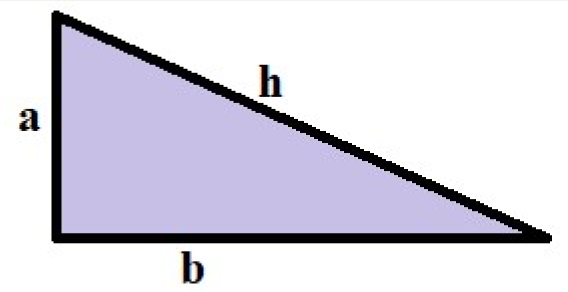
3. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden la unidad?

4. Halla la hipotenusa de los triángulos rectángulos, cuyos catetos miden:

7 m y 9 m	10 m y 12 m
11 m y 12 m	5 m y 8 m

UNIDAD DIDACTICA 9: TEOREMA DE PITÁGORAS

FICHA 3: Cálculo de un cateto conociendo la hipotenusa y otro cateto.



$$\boxed{h^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{h^2 - b^2}}$$

1. Determina el valor de un rectángulo de 3 cm de ancho y 22 cm de diagonal .

2. Los siguientes lados corresponden al cateto y la hipotenusa de una triángulo rectángulo .Halla el valor del otro cateto .

5 dm y 8 dm	12 dm y 13 dm
8 dm y 10 dm	3 dm y 4 dm

3. Si la diagonal de un cuadrado es 6, ¿cuánto valen sus lados? Indica la respuesta correcta.

a. 2 cm

b. 3’42 cm

c. 4’24 cm

d. 5 cm

4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y uno de sus catetos 15 cm. ¿Cuál es la longitud del otro cateto? Indica la respuesta correcta.

a. 18 cm

b. 20 cm

c. 24 cm

d. 21 cm

5. ¿Cuál es el lado de una cuadrado de diagonal 6 cm? Indica la respuesta correcta.

a. 2 cm

b. 3’42 cm

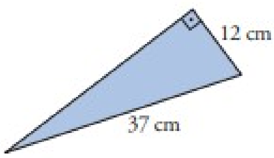
c. 4’24 cm

d. 5 cm

6. Halla el lado que falta en las siguientes ternas pitagóricas, dadas en metros. El orden es cateto 1, cateto 2 e hipotenusa.

6, 10 , a	**11, c , 15**
b, 4, 7	**5,10 , a**

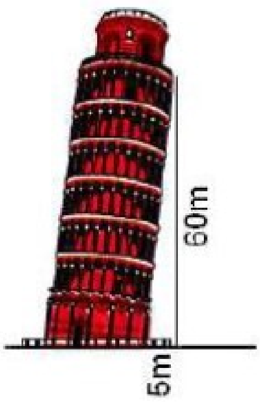
7. Calcula la longitud del cateto desconocido:



8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10’7 m y uno de los catetos 7’6 m. Halla la longitud del otro cateto.

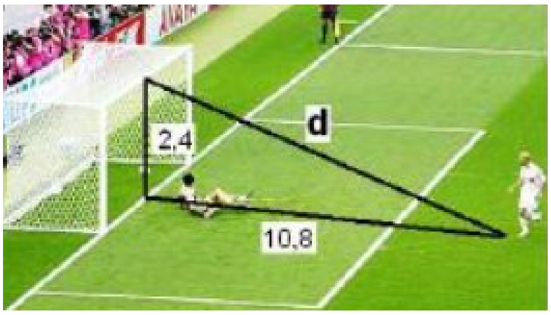
UNIDAD DIDACTICA 9: TEOREMA DE PITÁGORAS

FICHA 4: Problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras en situaciones reales.

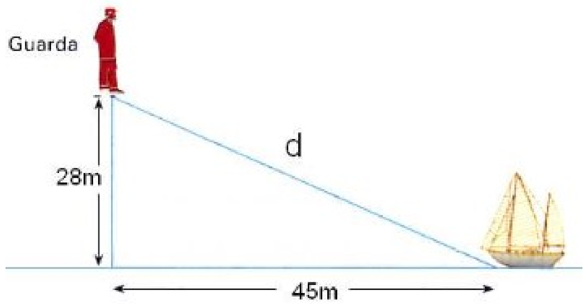


1. La Torre de Pisa está inclinada de modo que su pared lateral forma un triángulo rectángulo de catetos 5 metros y 60 metros. ¿Cuánto mide la pared lateral?

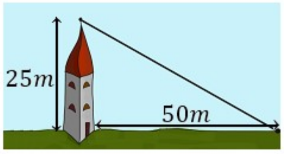
2. La altura de una portería de fútbol reglamentaria es de 2’4 metros y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya de gol es de 10’8 metros. ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?



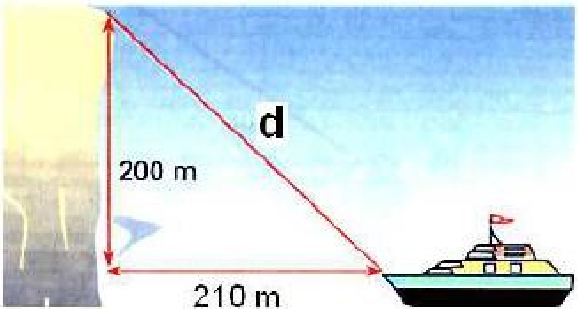
3. Un guardacostas observa un barco desde una altura de 28 metros. El barco está a una distancia horizontal del punto de observación de 45 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, de la visual del guardacostas al barco?



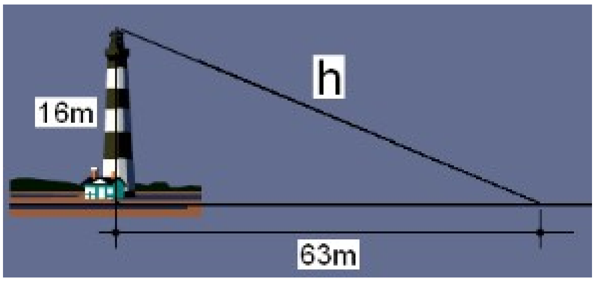
4. Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?



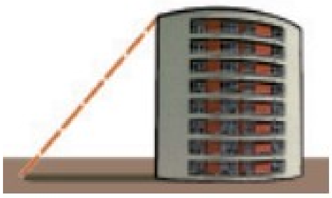
5. Desde un acantilado de 200 metros de altura se observa un barco que se encuentra a 210 metros de dicho acantilado. ¿Qué distancia, en metros, recorre la visual desde el acantilado hasta el barco?



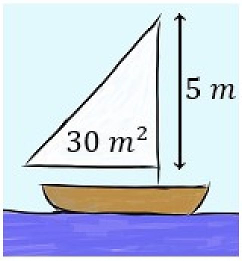
6. Un faro de 16 metros de altura manda su luz a una distancia horizontal sobre el mar de 63 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, del haz de luz?



7. Calcula la altura del edificio donde vive María , si la sombra que proyecta el mismo es de 49 metros y si la distancia desde la azotea hasta el punto donde termina la sombra es de 80 metros .



8. Hallar las medidas de los lados de una vela con forma de triángulo rectángulo si se quiere que tenga un área de 30 metros al cuadrado y que uno de sus catetos mida 5 metros para que se pueda colocar en el mástil.

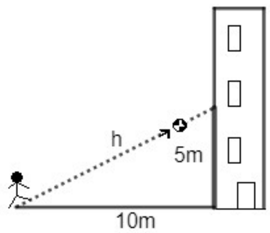


9. Dos coches parten de uan ciudad a la vez y en direcciones perpendiculares. El primero lleva una velocidad de 60 km/h y el segundo de 89km/h. ¿Qué distancia les separa al cabo de 1 hora y cuarto?

10. Dos aviones despegan de un aeropuerto al mismo tiempo y con direcciones perpendicualres. El primero lleva una velocidad de 600km/h y el segundo de 800 km/h. ¿Qué distancia les separa al cabo de 2 horas?

11. Una escalera mide 2'5 m de longitud y al apoyarse en la pared , su base dista de ella 0'7 m. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?

12. Jaime está a 10 metros de un edificio y lanza su balón en línea recta ascendente y alcanza el segundo piso del edificio (55 metros de altura). ¿Cuánto mide la trayectoria del balón (desde que lanza hasta que impacta)?

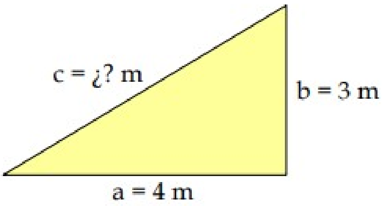


13. Una árbol de 4 m de altura se ha tronchado por la fuerza del viento en un punto situado a 1 m del suelo. ¿Aqué distancia del pìe del árbol quedará el extremo caido?

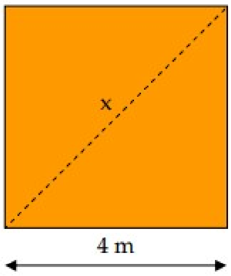
UNIDAD DIDACTICA 9: TEOREMA DE PITÁGORAS

FICHA 5: Problema de aplicación del Teorema de Pitágoras en Figuras geométricas.

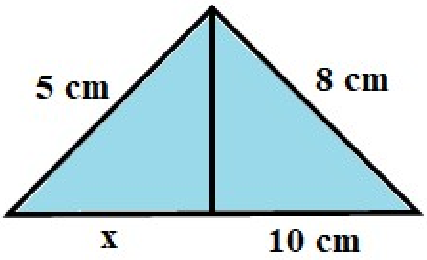
1. Dado el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido.



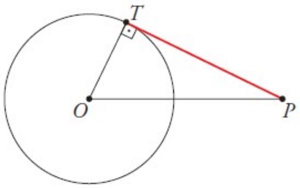
2. Para el siguiente cuadrado, halla x y el perímetro.



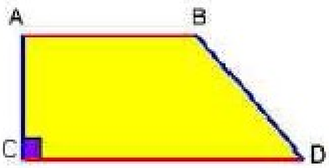
3. Calcula la altura de un triángulo de la dos 5cm, 8 cm y 10 cm.



4. La distancia de un punto P al centro O de una circunferencia es 89 cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT mide 80 cm. Halla el área y el perímetro de la circunferencia.

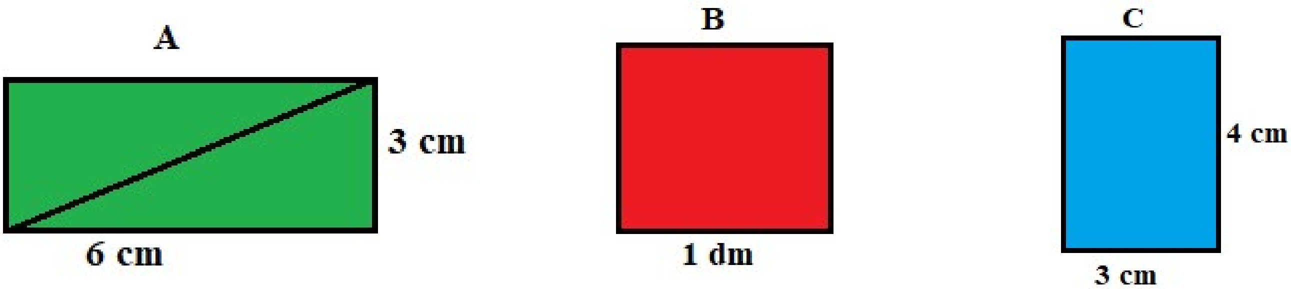


5. Halla la medida de la altura de un trapecio rectángulo, cuya base mayor mide 28 metros, su base menor 20 metros y su lado oblicuo 17 metros:



6. Una antena está sujeta al suelo por dos cables que forman un ángulo recto de longitudes 2’7 m y 3’6 m. ¿Cuál es la distancia que separa los dos puntos de union de los cables con el suelo?

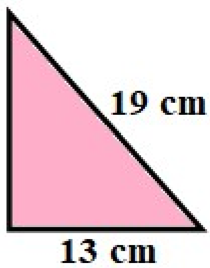
7. Empareja cada una de estas figuras con la medida de su correspondiente diagonal.



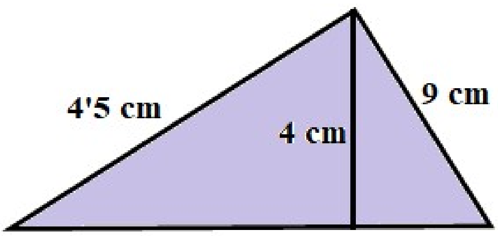
0,5 dm **0,67 dm** **14,1 cm**

8. la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 15 m, y este valor es el triple de uno de los catetos. Halla el perímetro de dicho triángulo.

9. Halla el perímetro del siguiente triángulo



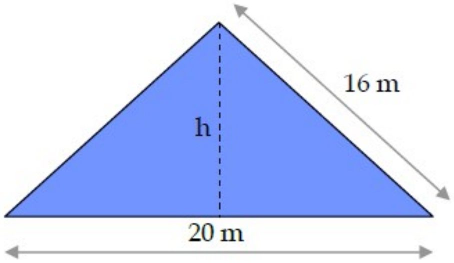
10. Calcula los catetos y las hipotenusas de todos los triángulos rectángulos que se formen en la siguiente figura.



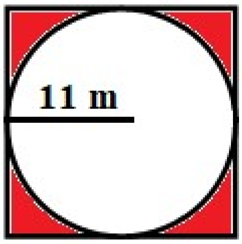
UNIDAD DIDACTICA 9: TEOREMA DE PITÁGORAS

FICHA 6: Problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras en figuras geométricas.

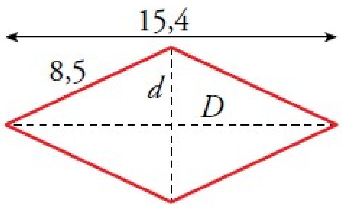
1. Para el siguiente triángulo isósceles, calcula el perímetro, la altura y el área.



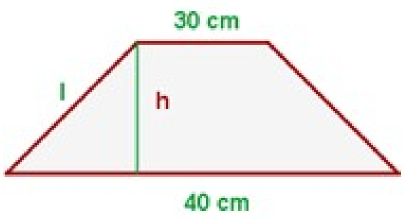
2. Calcula el perímetro de la figura coloreada.



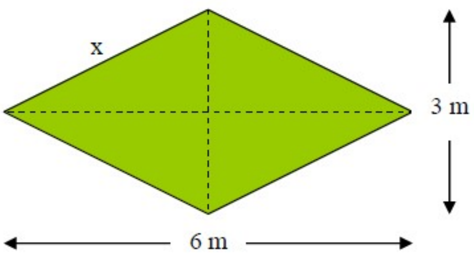
3. El lado de un rombo mide 8’5 y una de sus diagonales 15’4 .Calcula su área



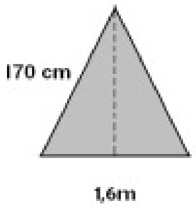
4. El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcular los lados no paralelos y el área.

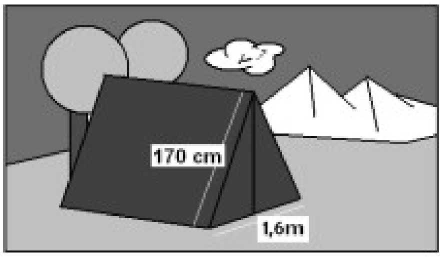


5. En el siguiente rombo, calcula el valor de la “x”

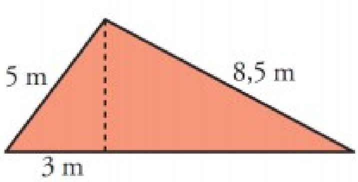


6. La cara frontal de una tienda de campaña es un triángulo isósceles cuya base mide 1’6 metros y cada uno de los lados iguales mide 170 centímetros. Calcula la altura en centímetros de esa tienda de campaña.

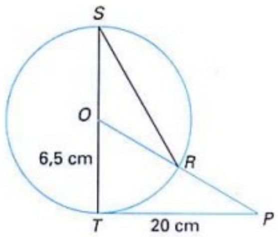




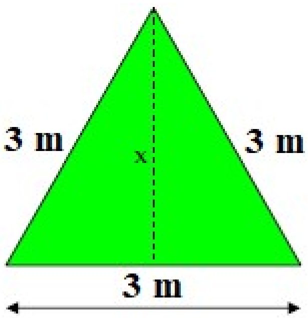
7. Halla el perímetro, en metros, del triángulo de la figura.



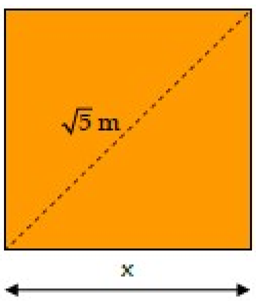
8. ¿Cuál es la distancia entre los puntos R y P?



9. Para la siguiente figura, calcula la altura, el perímetro y el área.



10. Para la siguiente figura, calcula la altura, el perímetro y el área.



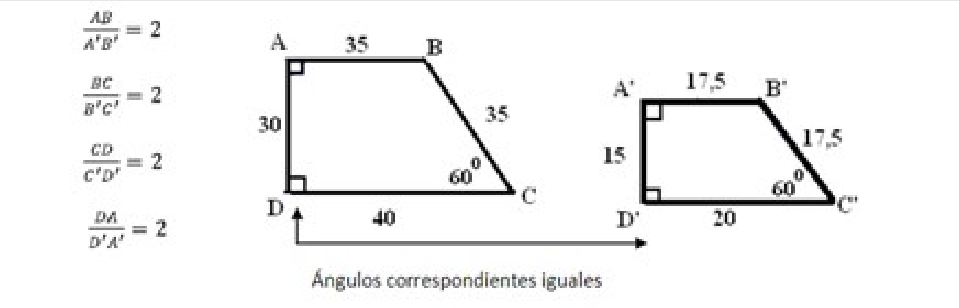
UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.

FICHA 1: Razón de semejanza.

Definición: Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque no tengan el mismo tamaño.

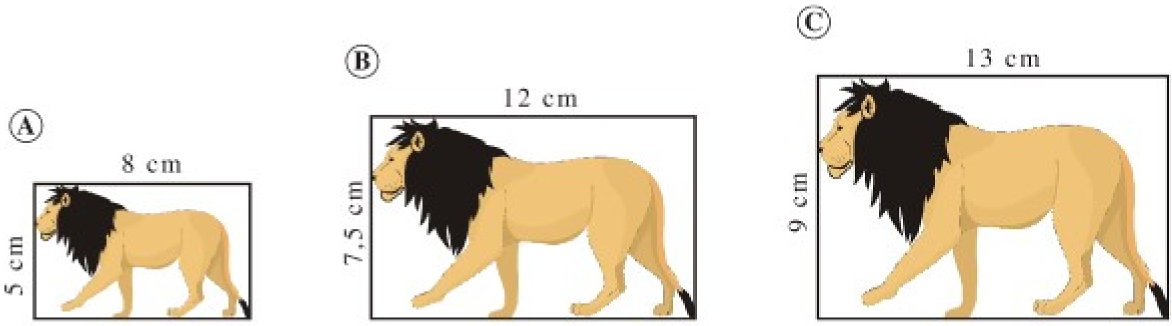
Para que dos figuras sean semejantes los ángulos homólogos deben ser iguales y los segmentos homólogos deben ser proporcionales.

El cociente entre segmentos homólogos es una razón de proporcionalidad y se llama RAZÓN DE SEMEJANZA de la figura o ESCALA.

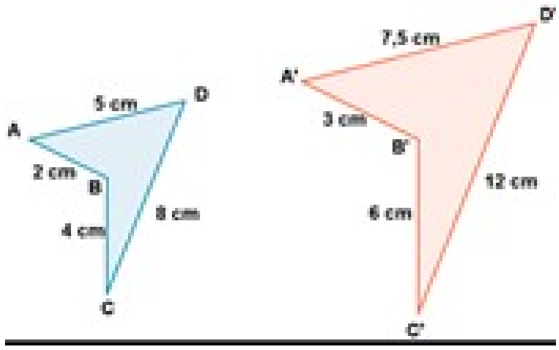


1. Rodea las imágenes que son semejantes.

2. Observa estas tres fotografías e indica si son semejantes entre sí y por qué:

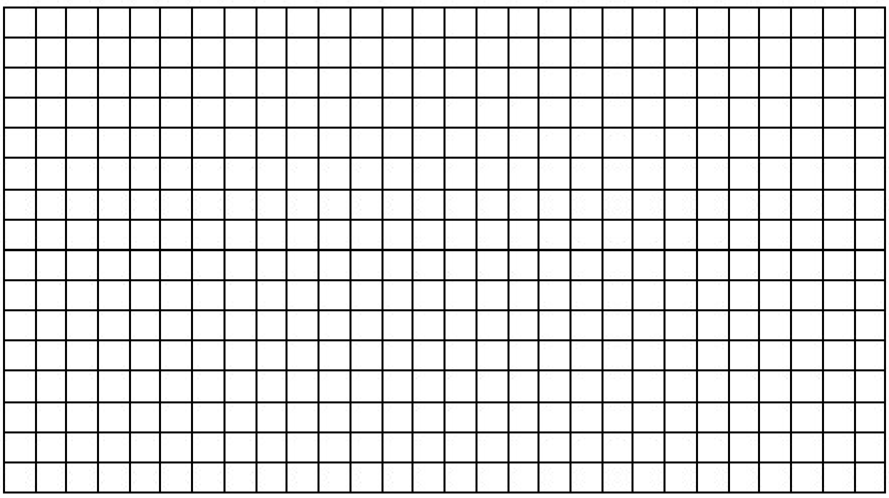


3. Calcula la razón de semejanza de las siguientes figuras:



4. Dibuja un triángulo rectángulo 3, 4 y 5 cm de lado y otro de 6, 8 y 10 cm de lado. ¿Son semejantes?

5. Dibuja en la cuadrícula un polígono semejante al dado con razón de semejanza igual a 2.



6. Los lados de un triángulo miden 6, 4 y 9 cm. Si el lado menor de un triángulo semejante al triángulo dado mide 6 cm, ¿cuánto miden los otros lados?

UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.

FICHA 2: Relación de áreas en figuras semejantes.

La razón de los perímetros de dos figuras semejantes es igual a la razón de semejanza.

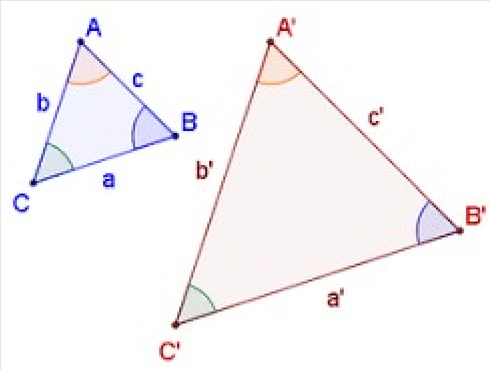
La razón de las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La razón de los volúmenes de dos poliedros semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

$$\text{Perímetros}: \quad \frac{P}{P'} = r$$

$$\text{Áreas}: \quad \frac{A}{A'} = r^2$$

$$\text{Volumen}: \quad \frac{V}{V'} = r^3$$

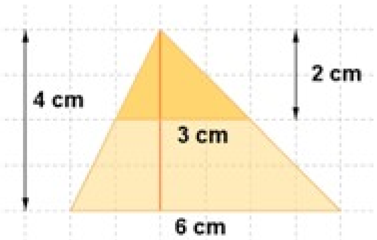


1. Dos polígonos son semejantes con razón de semejanza 5. Si el perímetro del menor es 12 cm, halla el del mayor.

2. El perímetro de un polígono es de 25 cm y el de otro 10 cm. Si ambos son semejantes, calcula la razón de semejanza que transforma el mayor en el menor y viceversa.

3. Dos polígonos son semejantes con razón de semejanza 3. Si el área del menor es 15 cm^2, halla el área del mayor.

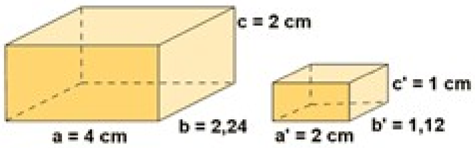
4. Calcula la razón de semejanza de las áreas de los dos triángulos de la figura.



5. Las áreas de dos figuras semejantes son 80 cm^2 y 20 cm^2 respectivamente. Halla la razón de semejanza que transforma la mayor en la menor y la menor en la mayor.

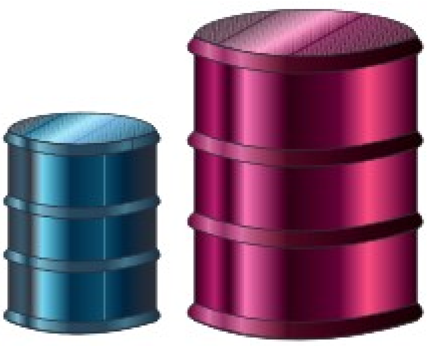
6. El volumen de una pirámide es de 250 cm^3. Si es semejante a otra menor con razón de semejanza 6, halla el volumen de la segunda.

7. Calcula la razón de semejanza de los dos volúmenes de la figura.



8. Los volúmenes de dos cuerpos semejantes son respectivamente 5 cm^3 y 625 cm^3. Halla la razón de semejanza que transforma el mayor en el menor y viceversa.

9. En un bidón caben 100 L. ¿Cuántos litros caben en un bidón semejante,con razón de semejanza r1,5?



UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.

FICHA 3: Escalas.

Una escala es una razón de proporcionalidad o semejanza entre las dimensiones de un objeto real y las dimensiones del dibujo que representa a ese objeto real.

El antecedente (numerador) indica la dimensión en el dibujo (plano o mapa) y el consecuente (denominador) indica la dimensión en la realidad.

Se expresa,

1 : 20000 ó 1 / 20000 dibujo : objeto real ó dibujo / objeto real

Significa, 1 cm en el dibujo equivale a 20000 cm (2 hm = 200 m) en la realidad.

TIPOS DE ESCALAS

Natural: el objeto y su dibujo son iguales.(1:1)

Reducción: el dibujo es más pequeño que el objeto real.(1:2 1:50 1:1000 1:25000)

Ampliación: el dibujo es más grande que el objeto real. (2:1 50:1)

1. La pizarra mide 2 metros de largo por 1 metro de ancho, ¿qué tamaño tendrá su dibujo a escala 1:4?

2. Un móvil mide 15 cm x 5 cm, ¿qué tamaño tendrá su dibujo a escala 3:1?

3. Una habitación mide 3m x 4m, ¿cuánto medirá su dibujo a escala 1:25?

4. Dibuja goma de borrar a escala 3:1

5. Se ha dibujado el plano de una habitación cuyas dimensiones son 9 m de largo y 6 m de ancho. En el plano, el largo de la habitación es 12 cm. Calcula:

a. ¿A qué escala está dibujado el plano?

b. ¿Cuál es el ancho de la habitación en el plano?

6. Un mapa de España está construido a escala 1:25000. ¿A cuántos kilómetros se encuentran dos ciudades que en el mapa están separadas 10 cm?

7. La distancia real en línea recta entre dos ciudades es de 180 km, en un mapa a escala 1:50000, ¿cuánto estarán separadas?

8. La distancia entre Madrid y Burgos es 243 km. En el mapa la distancia entre ambas ciudades es 8.1 cm. ¿cuál es la escala del mapa?

9. ¿A qué escala está un mapa en el que 900 hm en la realidad vienen representados en el mapa por 5 cm?

<u>UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.</u>

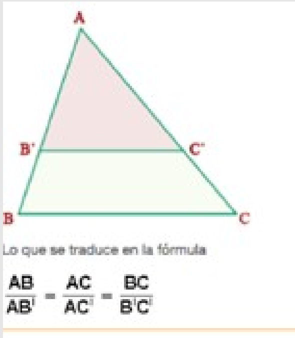
FICHA 4: Semejanza de triángulos. Teorema de Tales.

REPASO

Dos figuras son semejantes cuando tiene la misma forma, aunque no tengan el mismo tamaño.

Para que dos figuras sean semejantes los <u>ángulos</u> homólogos deben ser <u>iguales</u> y los <u>segmentos</u> homólogos deben ser <u>proporcionales</u>.

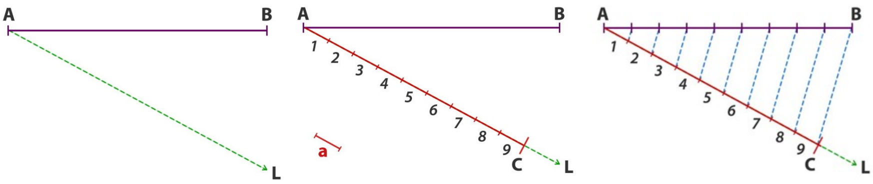
TEOREMA DE TALES



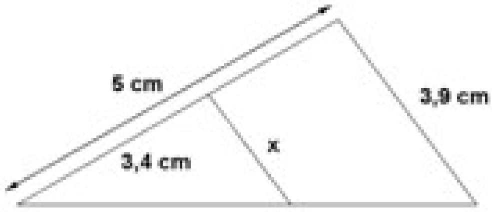
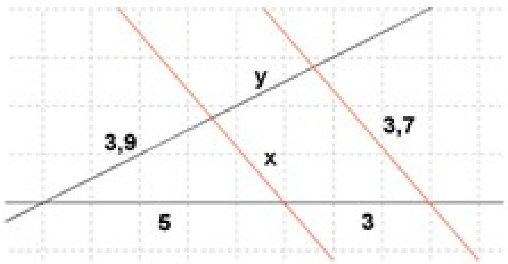
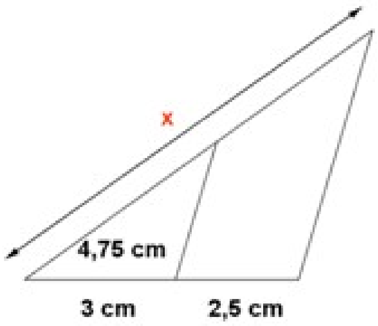
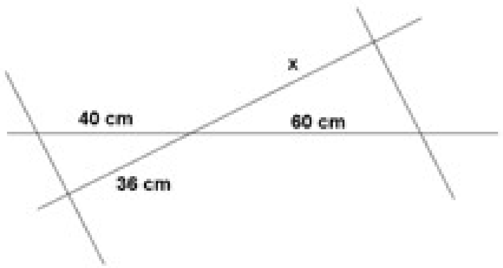
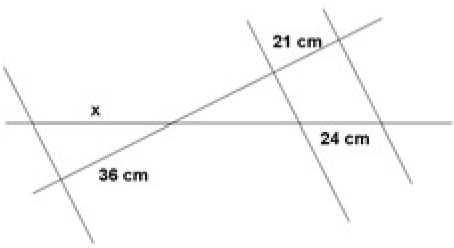
"Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes."

1. Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de 5 cm en siete partes iguales.

Proceso para dividir un segmento en un número determinado de partes iguales:

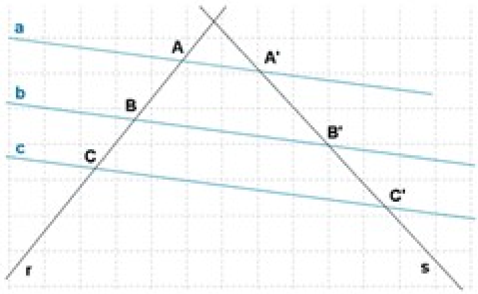


2. Halla el valor de "x" o de "y", en cada caso, aplicando el Teorema de Tales.

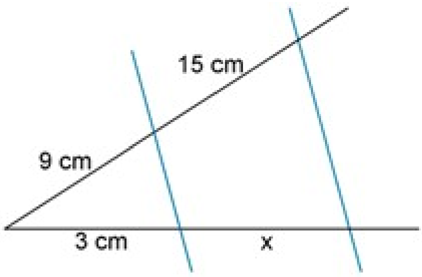
	
	
	
	
	

3. Halla el valor de **B'C'** aplicando el Teorema de Tales.

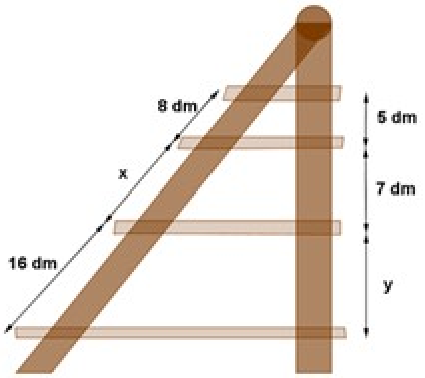
AB = 15 cm, BC = 20 cm, A'B' = 12 cm



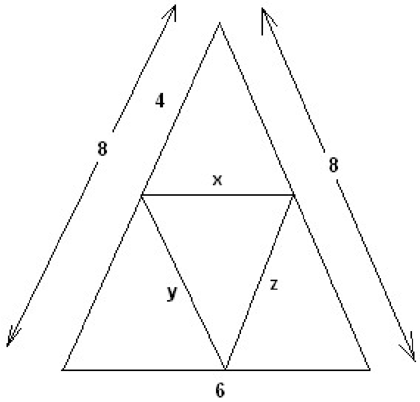
4. Calcula el valor de "x"



5. Calcula los valores desconocidos.



6. Calcula x, y, z (las unidades son centímetros):



UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.

FICHA 5: Criterios de semejanza de triángulos

Dos TRIÁNGULOS son semejante si se cumple alguno de los siguientes criterios:

1. **Tienen los tres ángulos iguales**
2. **Tienen los tres lados proporcionales**
3. **Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual.**

1. Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo que mide 40º. ¿Son semejantes? Razona tu respuesta. Haz un dibujo.

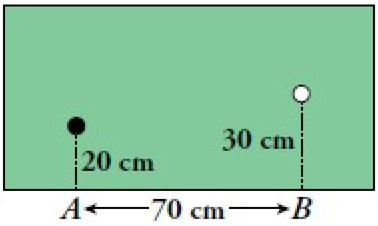
2. Dados los triángulos de lados a = 12, b = 10 y c = 15 cm y a' = 18, b' = 15 y c' = 22'5 cm, determina si son semejantes.

3. ¿Un triángulo con ángulos de 100º y 60º es semejante a otro de ángulos 20º y 100º? Razona tu respuesta. Haz un dibujo.

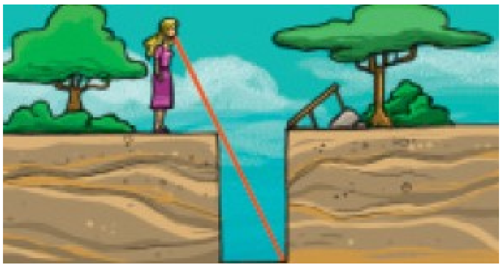
4. Dados dos triángulos, uno con un ángulo de 65º formado por lados de 7 cm y 8 cm, y otro con un ángulo de 65º formado por lados de 17'5 cm y 20 cm. ¿Son semejantes?

5. Determina si los triángulos de lados 24 m, 18m, 36 m y 12m, 16 m y 24 m, respectivamente, cumple la segunda condición de semejanza.

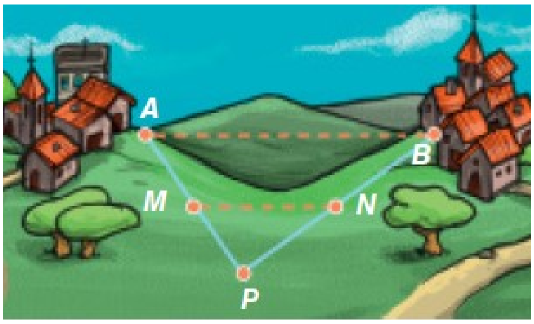
6. ¿En qué punto comprendido entre A y B debe dar la bola blanca para que al rebotar alcance a la bola negra?



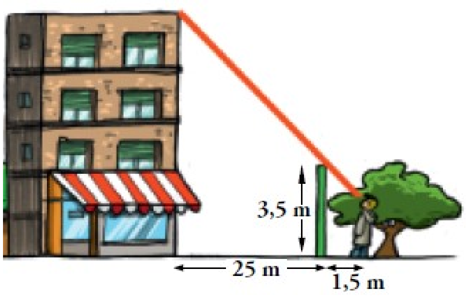
7. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1’2 m y alejándote 0’8 m del borde, desde una altura de 1’7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



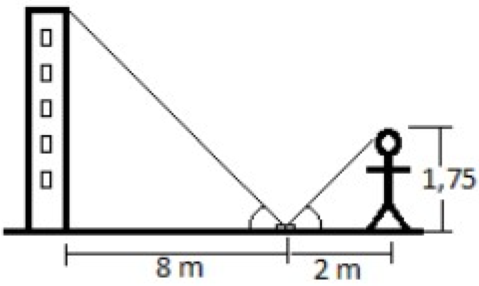
8. Entre dos pueblos A y B hay una colina. Para medir la distancia AB, fijamos un punto P desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas AP = 15 km, PM = 7,2 km y MN = 12 km. (MN es paralela a AB). Halla la distancia AB.



9. Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1’5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?



10. Hallar la altura del edificio de la figura si vemos su altura reflejada en un espejo.

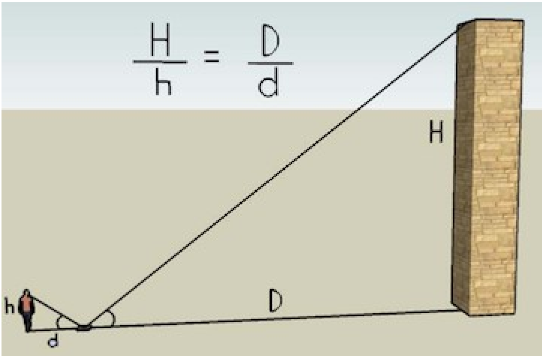


11. Queremos conocer la altura del campanario de la iglesia. Sabemos que las farolas del pueblo miden 5 m. Medimos en el mismo instante la sombra de una farola que es 2’5 m y la sombra del campanario que es 10 m

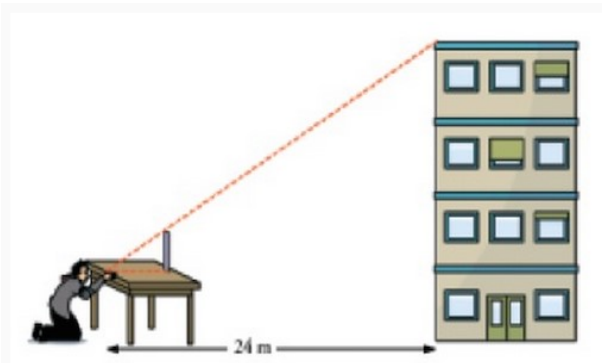
12. Calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6’5 m a la misma hora que un poste de 4’5 m de altura da una sombra de 0’90 m.

13. Una farola proyecta una sombra de 2 m, en el mismo momento una estatua de 3 m de altura proyecta una sombra de 1’5 m. Calcula la altura de la farola.

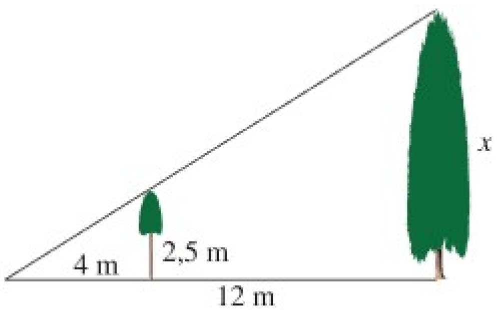
14. Una persona cuya distancia de sus ojos al suelo es de 1´6 m observa a través de un espejo colocado a 0’8 m de él, el alero de un tejado que está sobre una pared que dista 5 m del espejo. Calcula la altura a la que está el alero del tejado.



15. Para medir la altura de un edificio, David ha ideado el siguiente sistema: dispone de una mesa de 80 cm de ancho y 1 m de alto, en ella ha fijado en el borde una varilla de 52 cm, colocando sus ojos en el borde de la mesa ha desplazado la mesa hasta que ha conseguido ver el borde de la varilla coincidiendo con el borde superior del edificio, en ese momento ha medido la distancia desde su posición hasta el edificio. ¿Cómo calculará la altura del edificio?



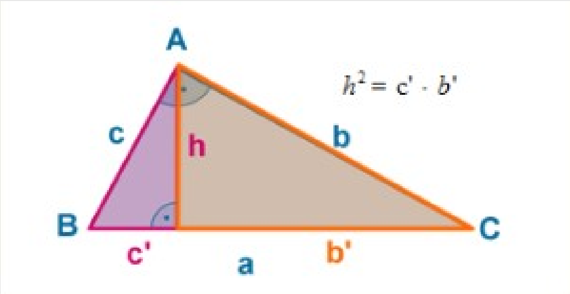
16. Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 metros en el momento en que otro árbol que mide 2’5 m proyecta una sombra de 4 metros.



UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.

FICHA 6: Semejanza de triángulos rectángulos. Teorema de la altura.

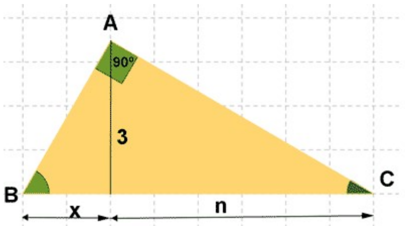
TEOREMA DE LA ALTURA



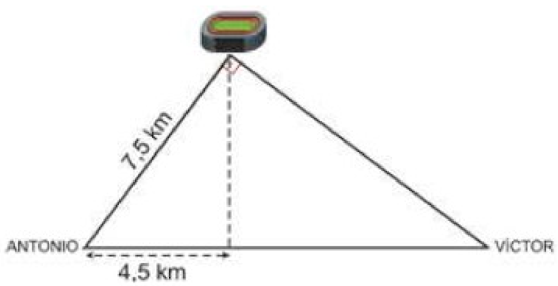
"El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa"

1. En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de 5 cm y 14 cm. Haz un dibujo explicativo. Halla la longitud de dicha altura.

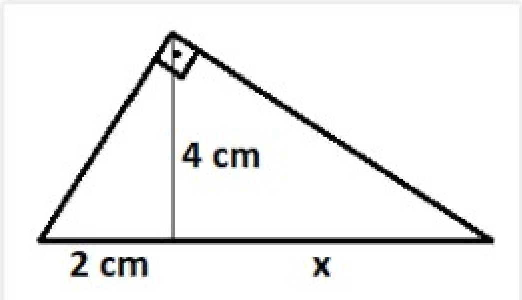
2. Calcula n sabiendo que x=1 cm.



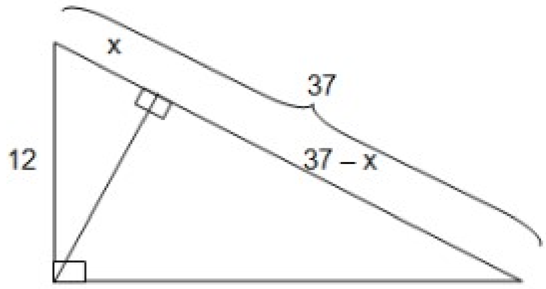
3. Antonio y Víctor tienen sus casas en la misma acera de una calle recta. Todos los días van a un polideportivo que forma triángulo rectángulo con sus casas. Observa la figura y responde:
   a. ¿A qué distancia está la casa de Víctor del polideportivo?
   b. ¿Qué distancia separa ambas casas?



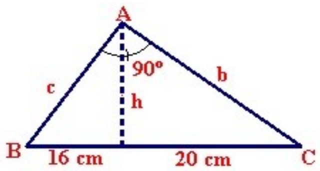
4. Aplica el Teorema de la altura y calcula el área del siguiente triángulo.



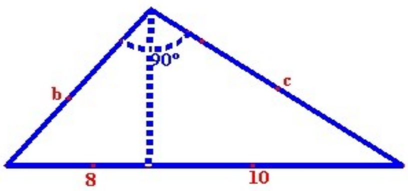
5. En un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 37 cmy su cateto menor 12 cm, calcule la longitud de la altura sobre la hipotenusa



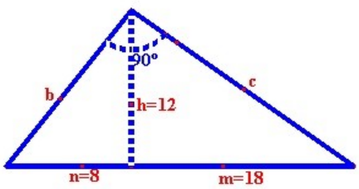
6. un triángulo rectángulo las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 16 y 20 cm. Calcula la hipotenusa y los catetos del triángulo.



7. Sabiendo que las proyecciones sobre los catetos miden 10 y 8 cm. Calcula los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo



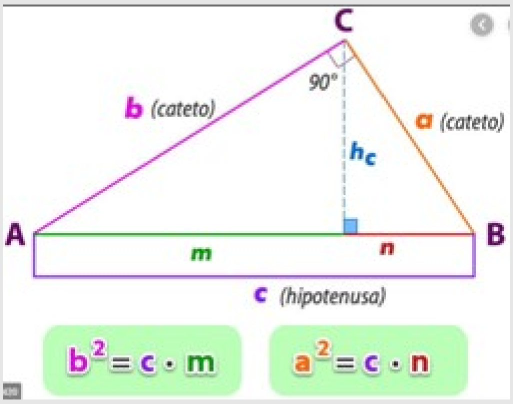
8. Si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 8 y 18 cm. ¿Cuánto miden los catetos?



UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.

FICHA 7: Semejanza de triángulos rectángulos. Teorema de los catetos.

TEOREMA DE LOS CATETOS

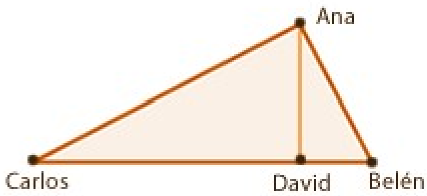


"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la misma"

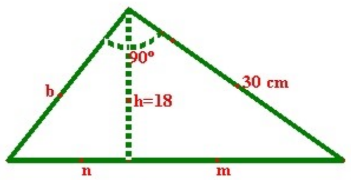
1. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 2'4 m y su proyección sobre la hipotenusa mide 2'215 m. Calcula la longitud de la hipotenusa.

2. Dado un triángulo rectángulo de hipotenusa 17cm, si un cateto mide 8 cm, la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa, ¿cuánto medirá?

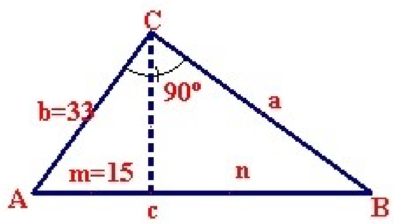
3. Las casas de cuatro amigos se encuentran situadas como muestra la figura. Sabiendo que la distancia de la casa de Belén a la de Carlos es de 1'5 km y la distancia de la casa de Belén a la casa de David es de 0'54 km, calcula las distancias que faltan.



4. Calcula los datos que faltan:

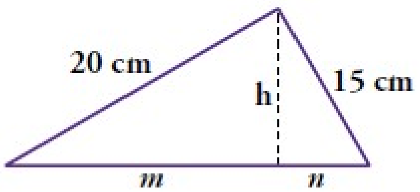


5. Calcula las medidas de los segmentos desconocidos.

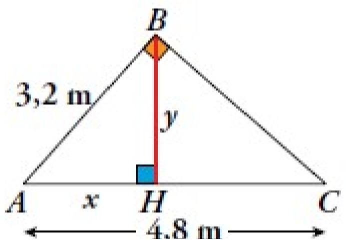


6. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m y su proyección sobre la hipotenusa mide 7,2 m. Calcula el área y el perímetro del triángulo.

7. En este triángulo rectángulo, calcula las longitudes h, *m* y *n*.



8. Halla los segmentos *x* e *y*.



UNIDAD DIDÁCTICA 10: SEMEJANZA.

FICHA 8: Problemas. Teorema de Tales, de la altura, de los catetos, de Pitágoras.

1. Apoyamos una escalera de 15 metros sobre una pared. Si el pie de la escalera está situado a 2 metros de la pared, ¿qué altura alcanza la escalera?

2. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que tiene una sombra de 2’5 metros y, al mismo tiempo, una vara vertical de 1’2 metros produce una sombra de 0’4 metros.

3. Calcula la altura de un triángulo equilátero de 16 cm de lado.

4. Si me tumbo en el suelo puedo ver a la vez la copa de un árbol y el tejado de la casa que hay detrás. El árbol mide 2’7 metros y está situado a 5’2 metros de la casa, y yo estoy a 1 metro del árbol. ¿Cuál es la altura de la casa?

5. Un rectángulo mide 7 cm x 10 cm. ¿Cuánto mide la diagonal?

6. La escalera y la rampa de un tobogán son los catetos de un triángulo rectángulo. Si miden 200 y 300 centímetros respectivamente, halla la altura del tobogán.

7. En un televisor de 32 pulgadas, la diagonal mide 32 pulgadas. Una pulgada es 2’54 cm. He comprado un televisor de 32 pulgadas que mide 70 cm de ancho. ¿Cuánto mide de alto?

8. Halla la altura y los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 22 cm y la proyección de uno de los catetos mide 3 cm.

9. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 6 cm.

10. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo cuya base mide 8 cm y su altura 5 cm.

11. Halla el área de un triángulo cuya base mide 9 cm y la altura es $\frac{2}{3}$ de la base.

12. Calcula el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 12 cm.

13. Un pino de 10 m de alto proyecta una sombra de 20 m. ¿Qué longitud de cuerda necesitaremos para unir la copa del pino con el extremo del suelo donde llega su sombra?

14. Un trapecio isósceles tiene como base mayor el doble de la base menor y los otros dos lados miden 10 cm. Calcula el área si sabemos que el perímetro es 40 cm.

15. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio.

16. Un árbol de 3 m de altura proyecta una sombra de 7'5 m a las 12 del mediodía. ¿Qué sombra proyectará un niño que mide 1'65 metros?

17. Por la fuerza del viento, dos árboles que están separados por 15 metros se mueven de manera que las copas se tocan, formando un ángulo recto en ese punto. Uno de los árboles mide 11 metros. Calcula:

a. La altura del otro árbol.
b. La altura del punto donde se han tocado las copas desde el suelo.
c. La distancia de la vertical de ese punto hasta el pie de los árboles.

18. Una antena de 6 metros de altura está anclada al suelo por dos cables de 10 y 8 metros, respectivamente, a cada lado de la antena. ¿A qué distancia del pie de la antena está cada uno de los puntos de anclaje?

UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

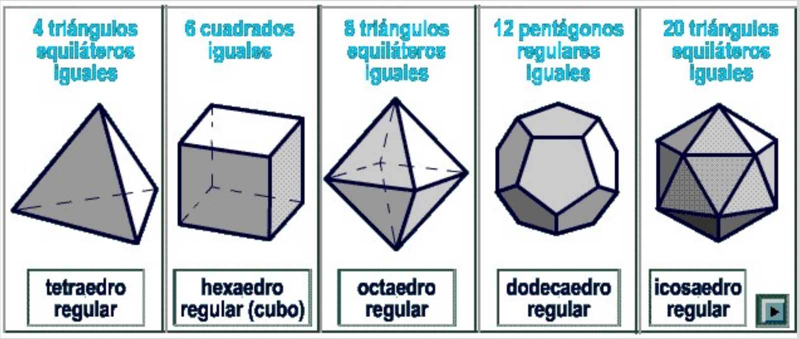
FICHA 1: Identificación de cuerpos geométricos.

CUERPO GEOMÉTRICO: Es un elemento de 3 dimensiones que delimita un volumen. Los cuerpos geométricos se llaman también sólidos geométricos.

A) Si sus caras son planas se llaman POLIEDROS, éstos pueden ser:

- **REGULARES, sus caras son polígonos regulares todos iguales. Son cinco:**

TETRAEDRO, HEXAEDRO, OCTAEDRO, DODECAEDRO, ICOSAEDRO



- **IRREGULARES, al menos una de sus caras es diferente a las demás. Son los prismas y las pirámides, pueden ser regulares o irregulares y rectos u oblicuos.**

PRISMA: Poliedro de dos caras iguales y paralelas llamadas bases y el resto de caras laterales son paralelogramos.

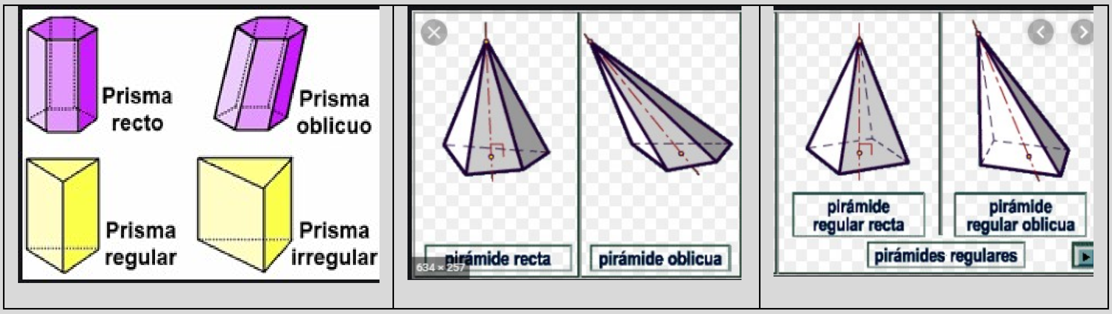
PIRÁMIDE: Poliedro que tiene una cara llamada base y el resto de caras laterales son triángulos que coinciden en un vértice.

Los prismas y las pirámides son poliedros irregulares pero a su vez pueden ser prismas o pirámides:

REGULARES: Su base o bases son polígonos regulares

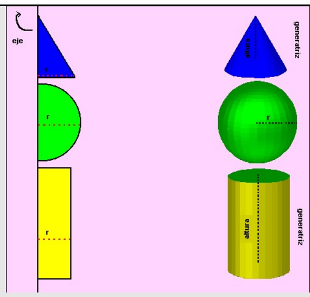
IRREGULARES: Sus bases son polígonos irregulares

RECTOS: Las aristas laterales son perpendiculares a las bases



OBLICUOS, las aristas laterales NO son perpendiculares a las bases.

B) Si al menos una cara es curva se llaman CUERPOS REDONDOS o CUERPOS DE REVOLUCIÓN. Estos se generan al girar una figura plana alrededor de un eje.



Los tres cuerpos de revolución más importantes y utilizados son:

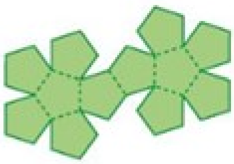
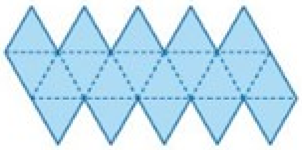
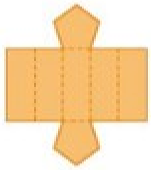
<u>CONO</u>: Se genera al hacer girar sobre un cateto a triángulo rectángulo.

<u>ESFERA</u>: Se genera al hacer girar sobre el eje a un semicírculo.

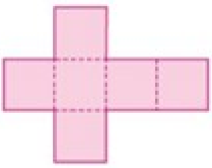
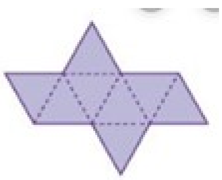
<u>CILINDRO</u>: Se genera al hacer girar sobre un lado a un cuadrado ó rectángulo.

C) Si cortamos una pirámide o un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un TRONCO de pirámide o de cono respectivamente.

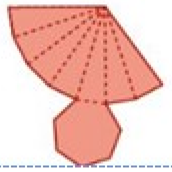
1. Identifica los siguientes cuerpos geométricos por su desarrollo.

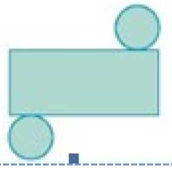
  

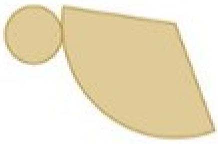
.______________. .______________. .______________.

.______________. .______________. .______________.

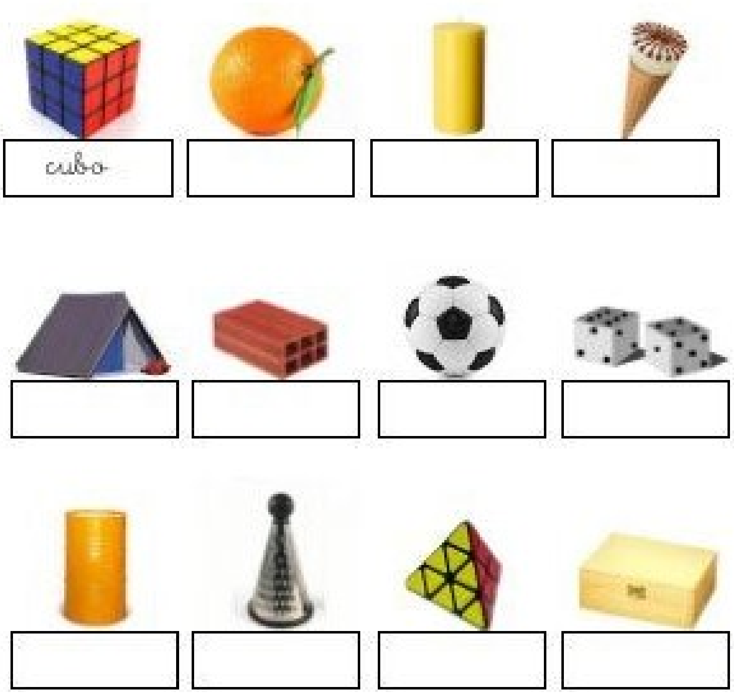






. ______________ .   . ______________ .   . ______________ .

2. Escribe el nombre de los siguientes cuerpos geométricos:



3. Completa la siguiente tabla:

Cuerpo geométrico	**Caras**	**Vértices**	**Aristas**	**Poliedro o C. Revolución**
Prisma triangular				
Cono				
Pirámide cuadrangular				
Ortoedro				
Icosaedro				
Cilindro				

UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

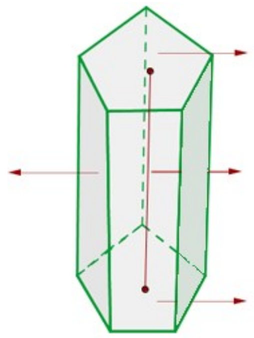
FICHA 2: Cálculo de áreas de prismas.

Para calcular el área de un prisma se suma el área de cada una de sus caras.

Si el prisma es regular:

Área de la base (según polígono) + Área de las caras (Perímetro de la base x altura)

1. Nombra los elementos señalados en el siguiente prisma:



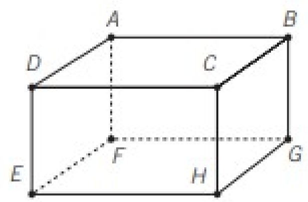
2. ¿Qué tipo de prisma atendiendo a su base y a sus aristas es el prisma del ejercicio anterior?

3. Rellena la siguiente tabla:

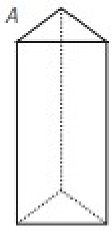
Prisma	**Caras**	**Vértices**	**Aristas**
Prisma triangular			
Cubo			
Pirámide hexagonal			
Ortoedro			

4. Averigua el número de lados que tiene la base de un prisma de 14 vértices, 7 caras y 21 aristas.

5. En el siguiente prisma marca de rojo los vértices, de azul las aristas y nombra con una sucesión de letras mayúsculas sus caras.



6. Dibuja el desarrollo plano del siguiente prisma:



7. Calcula el área total de un cubo de 5 cm de arista.

8. Calcula el área lateral de un prisma regular de 15 cm de alto con base pentagonal de 3 cm de lado.

9. Calcula el área total de un prisma hexagonal sabiendo que:

- Su altura es 100 cm.
- El lado de la base hexagonal mide 4 dm.
- La apotema de la base mide 3,5 dm

10. Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y una capacidad de 48 litros.

UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

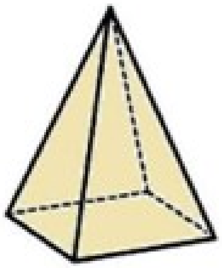
FICHA 3: Cálculo de áreas de pirámides.

Para calcular el área de una pirámide se suma el área de cada una de sus caras.

Si la pirámide es regular:

Área de la base (según polígono) + nº lados base x **área de caras laterales (triángulos cuya altura = apotema)**

1. Indica en el siguiente dibujo: base, caras, vértice, altura, apotema de la pirámide y apotema de la base.

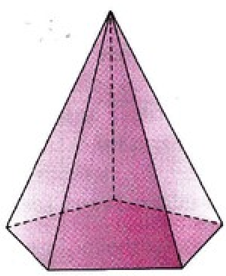


2. Completa la siguiente tabla.

Poliedro	**Caras**	**Vértices**	**Aristas**
Pirámide hexagonal			
Pirámide cuadrangular			
Tetraedro			

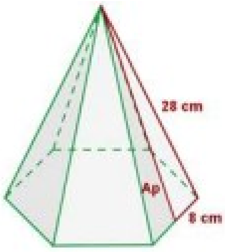
3. Si una pirámide es recta, todas sus caras son iguales. ¿Qué tipo de triángulos (atendiendo a sus lados) son esas caras?

4. En la siguiente pirámide nombra con letras mayúsculas todos sus vértices, después marca con un punto cada uno de ellos, marca de azul las aristas. Nombra la base y cada una de sus caras en función de las letras que has puesto en los vértices.



5. Dibuja el desarrollo plano de la pirámide anterior.

6. Calcula el área lateral y total de la siguiente pirámide:



7. Calcula la altura de la pirámide del ejercicio anterior.

8. Calcula el área lateral y total de una pirámide de base rectangular de 3 cm x 2 cm, cuya apotema mide 8 cm

9. Calcula el área total de una pirámide regular de 7 cm de altura cuya base es un hexágono de 6 cm de lado.

UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

FICHA 4: Cálculo de áreas de troncos de pirámides.

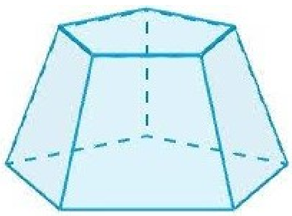
Para calcular el área de un tronco de pirámide se suma el área de cada una de sus caras.

Si el tronco de pirámide es regular:

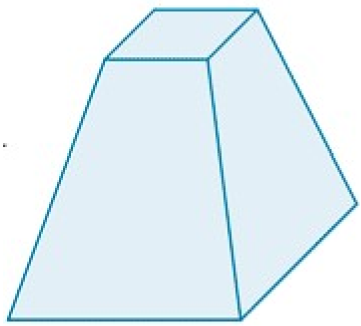
Área de la base mayor (según polígono) + Área de la base menor (según polígono) + área de caras laterales (trapecios isósceles)

Área trapecio= (B +b) x h / 2

1. Dibuja el desarrollo del siguiente tronco de pirámide.



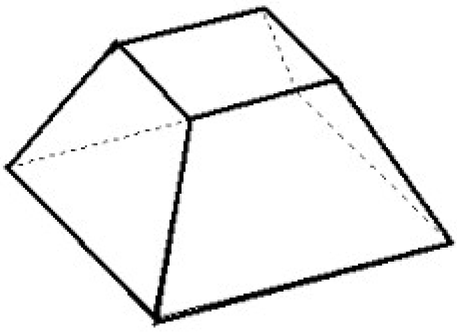
2. Indica las partes del siguiente tronco de pirámide: arista de base menor, arista de base mayor, arista lateral, altura y apotema.



3. Completa la siguiente tabla.

Tronco de pirámide	Caras	Vértices	Aristas
triangular			
cuadrangular			
hexagonal			

4. En la siguiente figura colorea una base de rojo y una cara de azul.



5. ¿Qué tipo de polígonos son las caras de un tronco de pirámide cuadrangular? ¿Y si es un tronco de pirámide hexagonal? Dibuja esas caras.

6. Escribe la fórmula para calcular el área de una cara de tronco de pirámide. Señala en un dibujo cada una de las incógnitas.

7. Calcula el área de un tronco de pirámide cuadrangular con las siguientes medidas:

- arista base mayor 24 cm
- arista base menor 14 cm
- arista lateral 13 cm

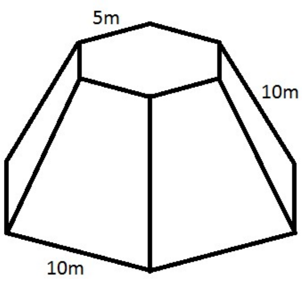
8. Calcula el área de un tronco de pirámide cuadrangular con las siguientes medidas:

- arista base mayor 15 cm
- arista base menor 9 cm
- apotema 7 cm

9. Calcula el área de un tronco de pirámide cuadrangular con las siguientes medidas:

- arista base mayor 12 cm
- arista base menor 6 cm
- altura 4 cm

10. Calcula el área total del siguiente tronco de pirámide.



UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

FICHA 5: Cálculo de áreas de cilindros.

Para calcular el área de un cilindro se suma el área de las bases (círculos iguales) y el área lateral (rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia)

$$A_{cilindro} = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r \times h$$

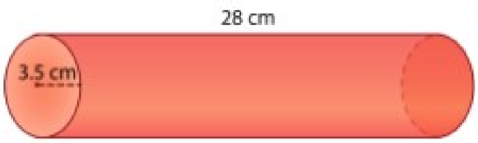
1. Dibuja el desarrollo de un cilindro.

2. ¿Cuántas superficies tiene un cilindro? ¿Qué formas tienen esas superficies?

3. Dibuja un cilindro e indica los siguientes elementos: bases, superficie lateral, altura y radio.

4. Explica por qué se puede calcular el área lateral del cilindro con la altura y el radio de sus bases.

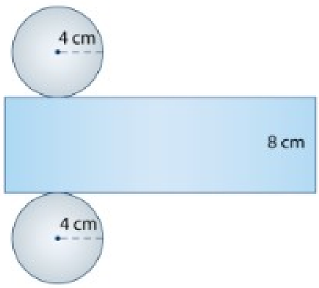
5. Dibuja la superficie lateral de este cilindro e indica sus dimensiones.



6. ¿Qué figura plana al girar sobre un eje genera un cilindro? ¿Qué recta hace de eje de giro?

7. Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

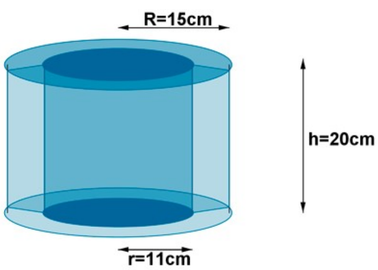
8. Calcula el área del cilindro.



9. Calcula el área de un cilindro de 15 cm de diámetro y 8’5 cm de altura.

10. La altura de un cilindro mide 8 m y su área lateral es 10.048 cm^2 ¿Cuánto mide el radio de la base?

11. Calcula la diferencia de papel en cm^2 que habría de más si forramos el cilindro por fuera en vez de por dentro.



UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

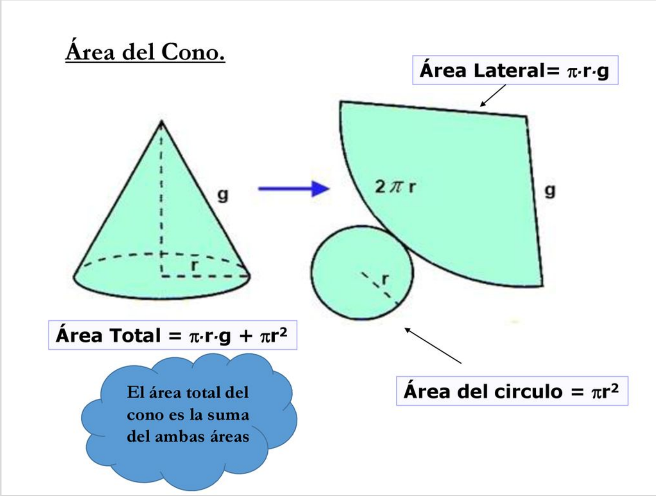
FICHA 6: Cálculo de áreas de conos.

El área lateral es el área de un sector circular de base 2πr y de altura g:

$$\text{Alateral} = \frac{\text{longitud} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g$$

El área de la base es el área de un círculo de radio r, por lo tanto:

$$A_{\text{cono}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = \pi r g + \pi r_2$$



1. Dibuja el desarrollo de un cono.

2. ¿Cuántas superficies tiene un cono? ¿Qué formas tienen esas superficies?

3. Dibuja un cono e indica los siguientes elementos: base, superficie lateral, altura, radio y generatriz.

4. ¿Qué línea es más larga, la altura o la generatriz de un cono?

5. ¿Qué figura plana al girar sobre un eje genera un cono? ¿Qué recta hace de eje de giro?

6. Calcula la generatriz de un cono de altura 4 cm y cuyo radio de la base es 3 cm.

7. Calcula el área de un cono de 2 cm de radio cuya generatriz mide 7cm.

8. Calcula el área de un cono de 15 cm de altura, cuya generatriz mide 17 cm.

9. Calcula es área de un cono de 35 cm de altura y 37 cm de radio.

10. Calcula el área de un cono generado por un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm.

11. ¿Cuánto mide el radio de un cono cuya área lateral es 339,2 cm2 si su generatriz es tres veces su radio?

UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

FICHA 7: Cálculo de áreas de troncos de conos.

Para calcular el área de un tronco de cono, se suman las áreas de las bases (círculos) y el área lateral (porción de una corona circular)

Área de las bases:

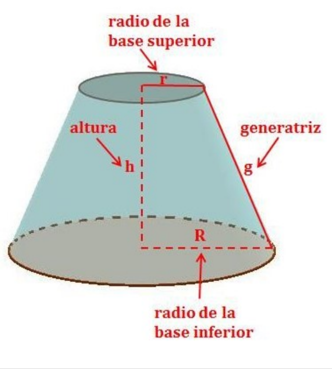
$$A_B + A_b = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(R^2 + r^2\right)$$

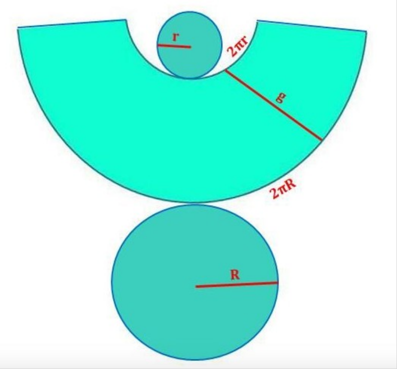
Área lateral:

$$AL = \frac{2 \cdot \pi \cdot R + 2 \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot g = \pi \cdot (R + r) \cdot g$$

Para calcular la generatriz:

$$g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$





1. Dibuja el desarrollo de un tronco de cono.

2. Indica en el siguiente tronco de cono: radio base menor, radio base mayor, altura y generatriz.

3. Cita tres objetos que tienen forma de tronco de cono.

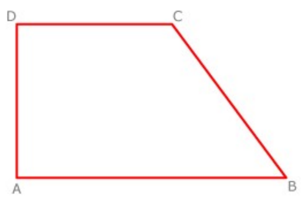
4. La fórmula utilizada para calcular el área lateral de un tronco de cono es similar a la fórmula utilizada para calcular el área de una figura plana, ¿cuál?. Haz los dos dibujos y establece el paralelismo.

5. Calcula la generatriz de un tronco de cono de 8 cm de altura y cuyas bases tienen de radios 7 cm y 13 cm.

6. Calcula el área de un tronco de cono cuyas bases tiene de radios 2 cm y 5 cm y su generatriz mide 5cm.

7. Calcula el área de un tronco de cono cuyas bases tiene de radios 5 cm y 12 cm y una altura de 24 cm.

8. Calcula el área del tronco de cono generado por el siguiente trapecio rectángulo al girar sobre el eje AD.



Base mayor AB = 8 cm

Base menor DC = 3 cm

Altura AD = 5 cm

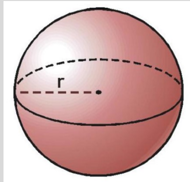
UNIDAD DIDÁCTICA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS.

FICHA 8: Cálculo de áreas de troncos de conos.

El área de una esfera se calcula con la siguiente fórmula:

$$\mathbf{A_{esfera} = 4\pi r^2}$$

Siendo r el radio de la esfera.



1. ¿Qué figura plana al girar sobre un eje genera una esfera? ¿Qué recta hace de eje de giro?

2. ¿Cuánto medirá de alto una esfera de radio **r**?

3. ¿Una esfera tiene superficies planas? ¿y una semiesfera?

4. Sabiendo que la superficie curva de una semiesfera es el doble que su superficie plana, deduce la fórmula del área de una esfera.

5. Sabiendo que el área de una esfera es igual al área lateral del cilindro que se ajusta por completo a ella, dibuja el cilindro que contendría perfectamente una esfera de 5 cm de radio, indicando todas sus dimensiones y sus áreas.

6. Calcula la superficie del círculo que quedaría al cortar una naranja de 8 cm de diámetro por la mitad.

7. Calcula el área de una esfera de 28 cm de radio.

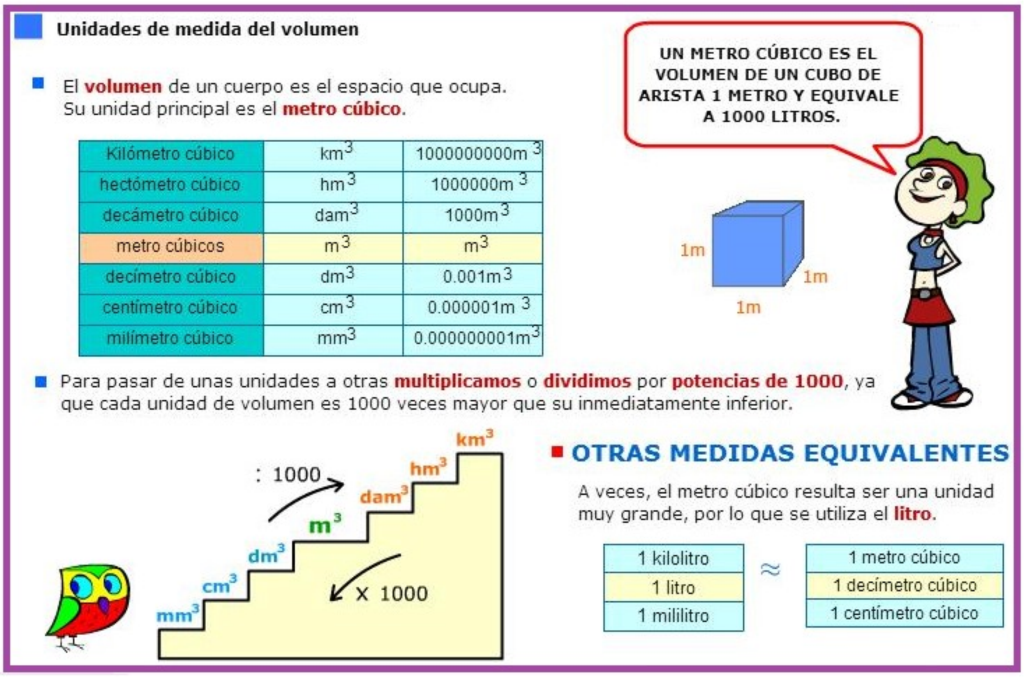
8. Calcula el área de una esfera de 18 cm de diámetro.

9. La superficie de una esfera es $803{,}84 cm^2$. ¿cuánto mide su radio?

10. Calcula el área de media esfera de 16 cm de diámetro.

UNIDAD DIDÁCTICA 12: MEDIDA DEL VOLUMEN

FICHA 1: Medidas de volumen



1. **Realiza los siguientes cambios de unidades: Fíjate bien en los ejemplos:**

	Km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
3456 m^3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	5	6										**0,000003456 Km^3**
1,25 hm^3						1,	2	5	0	0	0	0										**1250000 m^3**
45 cm^3																						**dam^3**
13450 dm^3																						**hm^3**
596,3 dam^3																						**cm^3**
16,2 m^3																						**dm^3**
3010 mm^3																						**cm^3**
35 Km^3																						**cm^3**
4,5 cm^2																						**dam^3**
2367 hm^2																						**Km^3**
0,09 cm^2																						**mm^3**
46 dam^2																						**m^3**
0,75 cm^2																						**mm^3**

2. **Pasa a metros cúbicos:**

a) 45 dam^3 50 m^3 500 dm^3

b) 8 hm^3 6 dam^3

3. Calcula y expresa el resultado en metros cúbicos:

a) 5 dam^3 35 m^3 800 dm^3 + 6 dam^3 180 m^3 200 dm^3

b) 250 m^3 550 dm^3 200 cm^3 x 50

4. Completa:

$$\boxed{Km^3} \xrightarrow{\mathbf{:10^6}} \boxed{} \xrightarrow{\mathbf{x\ 10^9}} \boxed{} \xrightarrow{\mathbf{:10^3}} \boxed{} \xrightarrow{\mathbf{x10^9}} \boxed{}$$

$$\boxed{cm^3} \xrightarrow{\mathbf{:10^6}} \boxed{} \xrightarrow{\mathbf{:10^6}} \boxed{} \xrightarrow{\mathbf{x10^9}} \boxed{} \xrightarrow{\mathbf{:10^{12}}} \boxed{}$$

$$\boxed{dm^3} \xrightarrow{} \boxed{hm^3} \xrightarrow{} \boxed{m^3} \xrightarrow{} \boxed{mm^3} \xrightarrow{} \boxed{cm^3}$$

$$\boxed{hm^3} \xrightarrow{} \boxed{km^3} \xrightarrow{} \boxed{m^3} \xrightarrow{} \boxed{cm^3} \xrightarrow{} \boxed{dam^3}$$

5. Realiza las siguientes operaciones con medidas de volumen

a) 0,023 Km^3 + 345000000 cm^3

b) 456,7667 dam^3 + 345000000 mm^3

c) 555777 dm^3 – 478 m^3

d) 34 m^3 – 2000 dm^3

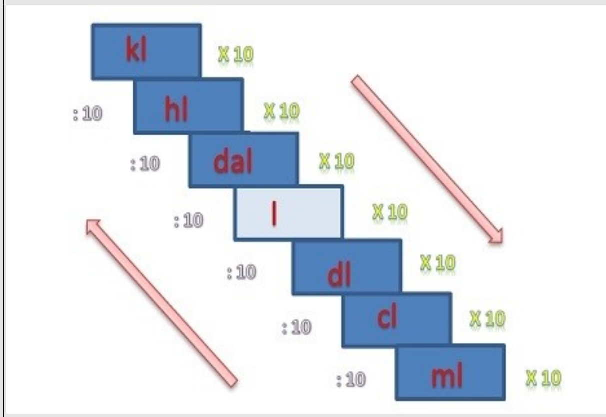
UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MÉTRICO DECIMAL

FICHA 2: Medidas de capacidad

Sirven para medir la cantidad de líquido que hay en un recipiente.

El litro “l” es la unidad principal

Para capacidades pequeñas se utiliza el centilitro “cl”



1. **Realiza los siguientes cambios de unidades.**

		Kl	hl	dal	l	dl	cl	ml	
4’56 hl			**4’**	**5**	**6**	**0**	**0**		**45600 cl**
23 dl									**ml**
550 hl									**Kl**
15’2 cl									**dl**
52 l									**cl**
3’25 Kl									**l**
43 ml									**dal**
0’45 l									**dl**
1 Kl									**hl**
2367 ml									**Kl**
9 cl									**dal**
75’3 dal									**ml**
2 ml									**hl**

2. Realiza las siguientes sumas y da el resultado en litros.

   a) 3 kl + 5 hl + 7 dal   b) 7 l + 4 cl + 3 ml

3. Une un recipiente de arriba con una jarra de abajo según corresponda:

4. Pasa a forma incompleja:

a) 4 Kl 200 l 125 cl

b) 12’34 hl 124’35 cl 12 ml

5. Pasa a forma compleja:

a) 126 l

b) 234’75 dal

6. Un ganadero recoge la leche de sus vacas en distintos tamaños de vasijas: una con 54’32 dl, otra con 0’57 dal, una botella de 250 cl y una garrafa de 5500 ml.

a. ¿Qué cantidad máxima de leche puede almacenar en sus vasijas?

b. Quiere vender 0’47 hl. ¿Cuántos litros le faltarán o le sobrarán?

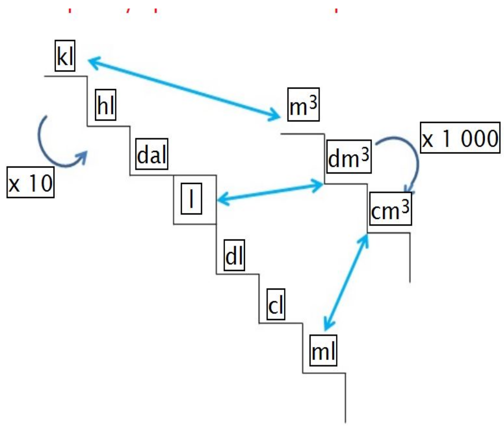
UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 3: Relación entre medidas volumen – capacidad

Volumen y Capacidad

- Un **litro (L)** es la capacidad o posibilidad de ser llenado un recipiente hueco en forma de cubo de un decímetro de arista.
- Por tanto **1 L = 1 dm^3**
- Ejemplo:
- **Un litro de agua (capacidad)**, destilada, a 4ºC y a nivel del mar, ocupa un espacio de **un decímetro cúbico (volumen)** y pesa **un kilogramo (masa)**.

EQUIVALENCIAS VOLUMEN-CAPACIDAD-MASA							
VOLUMEN	m^3			dm^3			cm^3
CAPACIDAD	kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
MASA	Tg			kg			g



1. Convierte las siguientes medidas según se indica:

a) 2.345 hl a m^3	→
b) 345 dl a dm^3	→
c) 234 m^3 a l	→
d) 23,45 dm^3 a cl	→
e) 12 Kl a m^3	→
f) 3dam^3 a hl	→
g) 68.759 l a m^3	→
h) 468 mm^3 a cl	→
i) 2.287 cc a cl	→
j) 1.287 ml a cm^3	→

2. Ordena las siguientes medidas de capacidad de mayor a menor. Ten en cuenta que para ordenarlas tienes que expresarlas todas en la misma unidad.

33 m^3, 234 l, 1234 cm^3, 24'25 cl, 23456 ml, 1 dm^3

3. En las siguientes expresiones ponga los símbolos “< “, “=” o “>” según proceda:

128 Kl _____ 127 Km^3	0’53 l _____ 5’3 dm^3	0’081 Kl _____ 81 l
29 l _____ 2’9 dl	32’8 hl _____ 328 hm^3	5’49 l _____ 549 cm^3
67 hl _____ 6.700 dl	74 dl _____ 7’4 cl	0’187 hl _____ 18’7 l
71 cl _____ 710 cc	34’8 dal _____ 483 l	0’96 cl _____ 96 ml

4. Si se recomienda introducir, a lo sumo, un pez pequeño por cada cuatro litros de agua, ¿cuántos peces pequeños se pueden introducir en un acuario cuyas medidas interiores son 88 x 65 x 70 cm?

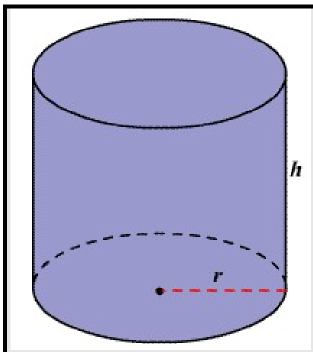
5. Si deseamos transportar 3 m^3 de agua en botellas de 2 litros, ¿cuántas botellas necesitaremos?

6. La capacidad de una piscina es de 75 kl. Actualmente contiene 300 hl. ¿Cuántos cm^3 de agua faltan para que se llene?

7. ¿Cuántas botellas de 750 cm^3 se necesitan para envasar 300 litros de refresco?

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 4: Volumen de un cilindro y un prisma

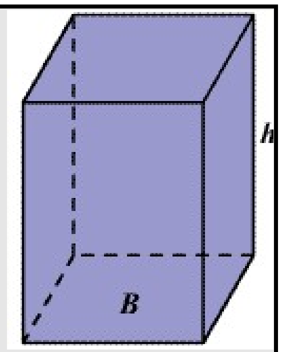


Cilindro

Para el cálculo del volumen, tanto de un cilindro como de un prisma, utilizamos la fórmula:

$$\boxed{\textbf{Volumen = Área de la base x Altura}}$$

¡Pero cuidado, porque la base de un cilindro es siempre un círculo, pero en un prisma varía!

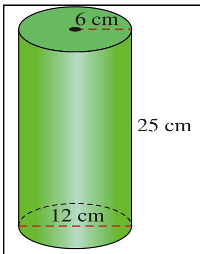


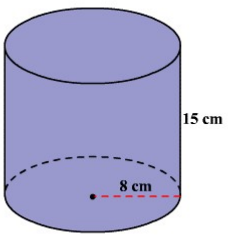
Prisma

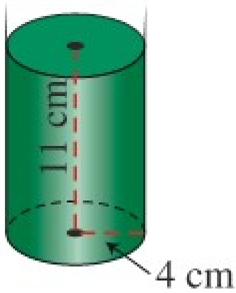
Recordemos algunas fórmulas del cálculo de áreas de figuras planas:

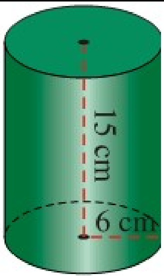
Círculo:	*Cuadrado:*	*Rectángulo:*	*Triángulo:*	*Rombo:*	*Romboide:*	*Polígono regular:*
$A = \pi \times r^2$	$A = \ell^2$	$A = b \times h$	$A = \frac{b \times h}{2}$	$A = \frac{D \times d}{2}$	$A = b \times h$	$A = \frac{P \times ap}{2}$

1. **Calcula el volumen de los siguientes cilindros y prismas:**



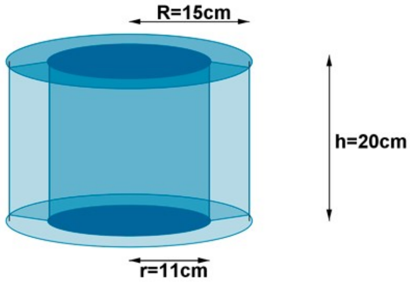




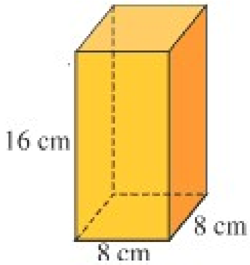


Calcula el volumen de un cilindro hueco sabiendo que:

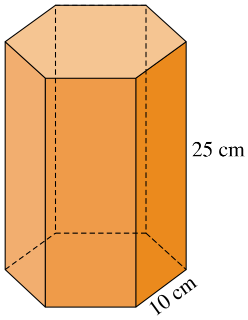
R = 15cm, r = 11 cm y h=20 cm.



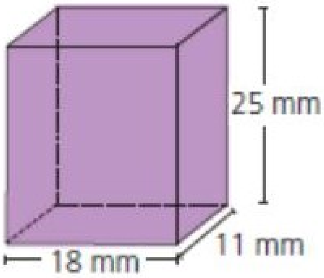
Prisma cuadrangular:

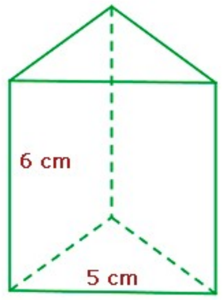
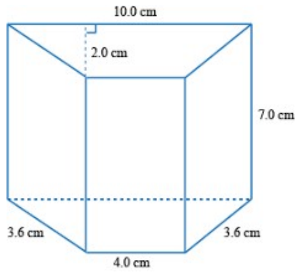
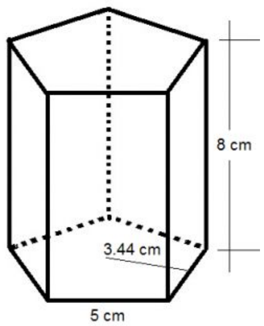
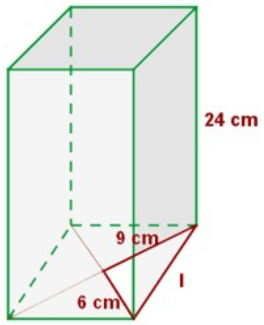
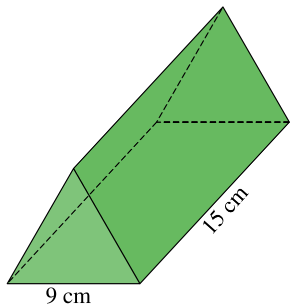


Prisma hexagonal:



Prisma rectangular:



Prisma triangular: 
Prisma trapezoidal 
Prisma pentagonal: 
Prisma romboidal: 
Prisma triangular: 

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 5: Problemas de volumen de un cilindro y un prisma

1. El diámetro de la base de un cilindro mide 8 m y la altura es el doble de la circunferencia de la base. Halla su volumen.

2. Sabiendo que el peso de un metro cúbico de hormigón es 2.350 kg, calcula el peso de un bloque cúbico de hormigón de 2,3 m de arista.

3. Calcula el volumen de un cilindro que tiene de radio de la base 5 cm y su altura es el doble del diámetro.

4. Calcula, en litros, el volumen de un tetrabrik cuyas dimensiones son 12x7x15 cm.

5. Un florero con forma cilíndrica tiene un diámetro interior de 12 cm y su altura es de 25 cm. Queremos llenarlo hasta los $\frac{2}{3}$ de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua necesitamos?

6. Durante una tormenta se registraron unas precipitaciones de 80 litros por metro cuadrado. ¿Qué altura alcanzaría el agua en un recipiente cúbico de 10 cm de arista?

7. Si echamos 7 cm^3 de agua en un recipiente cilíndrico de 1'3 cm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

8. Un depósito cilíndrico tiene 6 m de diámetro y 9 m de altura. ¿Cuántos litros de agua caben cuando se llena hasta $\frac{2}{3}$ de su altura?

9. Una piscina tiene unas dimensiones de 7x4x2 m. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarla dos grifos cuyo caudal es de 70 litros por minuto cada uno?

10. ¿Qué volumen de líquido cabe en una jarra de forma cilíndrica cuya base mide 14 cm de diámetro y cuya altura es de 25 cm?

11. La capacidad de un depósito de forma cilíndrica es de 339.000 litros. Halla la altura aproximada del depósito sabiendo que su radio mide 3 m.

12. Una viga de acero fon forma de prisma cuadrangular mide 16 m de altura. Calcula el lado de la base, sabiendo que su volumen es 0’36 m^3.

13. La Torre del Oro de Sevilla tiene forma de prisma octogonal de 12 m de lado, 14’5 m de apotema y 25 m de altura. Calcula el área lateral y su volumen.

14. Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1’5 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

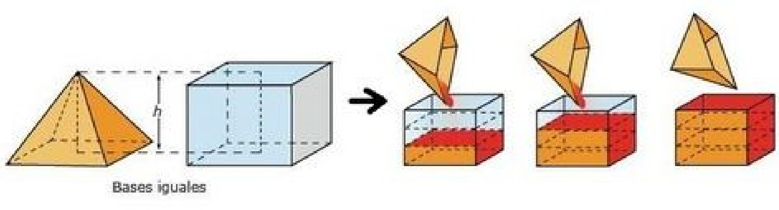
15. Un laboratorio farmacéutico envasa el alcohol en frascos cilíndricos de 4 cm de diámetro y 10 cm de altura. ¿Sabrías decir cuál es la capacidad del frasco?

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 6: Volumen de una pirámide

Observa que, si tuviéramos un prisma y una pirámide con la misma base e intentáramos llenar de arena el prisma utilizando como medida la pirámide, tendríamos que vaciar tres pirámides hasta llenar el prisma (observa el dibujo).

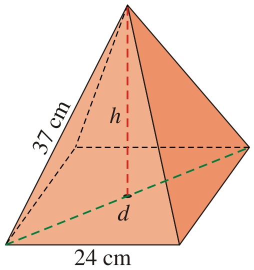
Así pues, el volumen de la pirámide es un tercio del volumen del prisma:



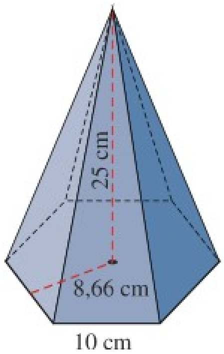
$$\text{Volumen pirámide} = \frac{\text{Volumen prisma}}{3}$$

1. **Calcula el volumen de las siguientes pirámides:**

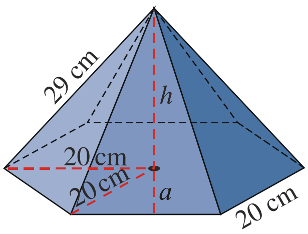
Pirámide cuadrangular:



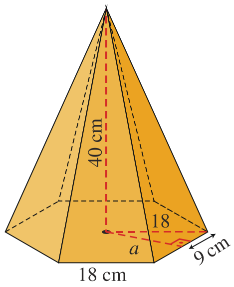
Pirámide hexagonal:



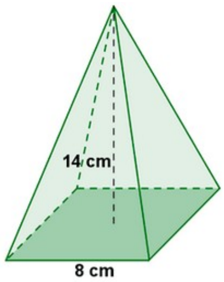
Pirámide hexagonal:



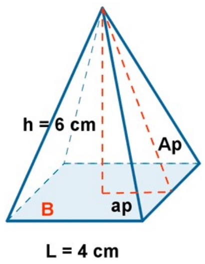
Pirámide hexagonal:



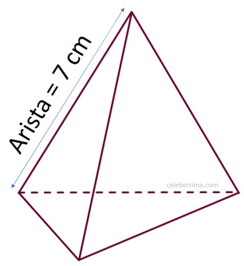
Pirámide cuadrangular:



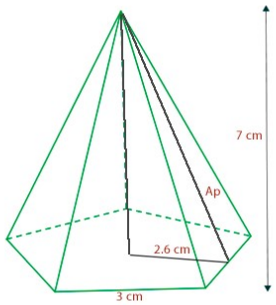
Pirámide cuadrangular:



Pirámide triangular:



Pirámide pentagonal:



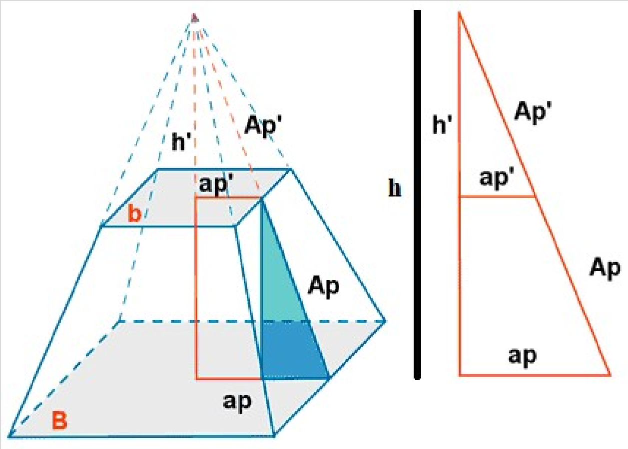
UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 7: Volumen de un tronco de pirámide

Recordemos que, el Teorema de Tales, nos da una relación entre los volúmenes de cuerpos semejantes, de la siguiente forma:

$\boxed{r^3 = \frac{V'}{V}}$ **Siendo "r" la razón de semejanza. Es decir:** $\boxed{V' = r^3 \cdot V}$

Y en este caso, la razón de semejanza es: $\boxed{r = \frac{h'}{h}}$

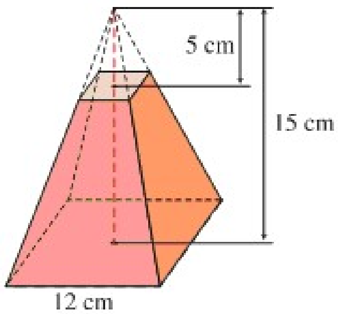


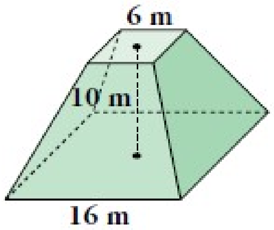
Por lo tanto: $\boxed{V' = r^3 \cdot V = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 \cdot V}$

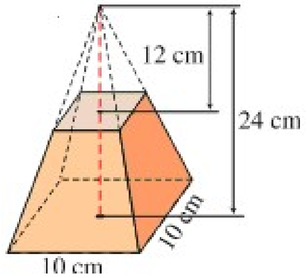
OJO: Podríamos calcular el volumen del tronco de pirámide calculando el volumen de la pirámide grande y restando el volumen de la pirámide pequeña:

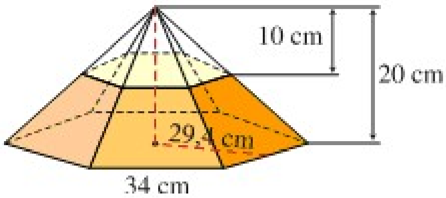
$$\Rightarrow \mathbf{V_{tronco} = V_{grande} - V_{pequeña}}$$

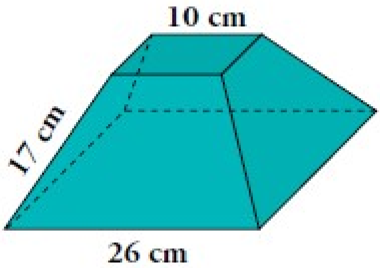
1. **Calcula el volumen de los siguientes troncos de pirámide:**

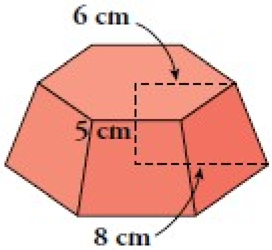


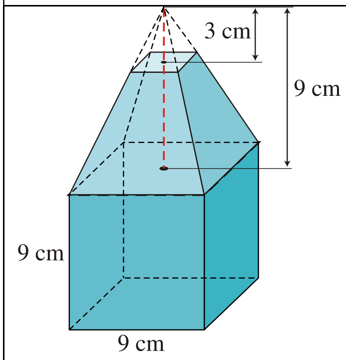

6 m
10 m
16 m


12 cm
24 cm
10 cm
10 cm


10 cm
20 cm
29,4 cm
34 cm


10 cm
17 cm
26 cm


6 cm
5 cm
8 cm


3 cm
9 cm
9 cm
9 cm

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 8: Problemas de volumen de una pirámide y de un tronco de pirámide.

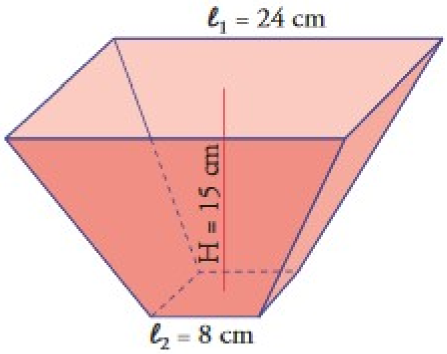
1. Calcula el volumen de una pirámide recta que tiene base cuadrada de lado 6 m y 9 m de apotema de la pirámide.

2. Un brillante ha sido tallado en forma de pirámide regular recta con base hexagonal de 2 mm de lado. La altura de la pirámide mide 4 mm. Halla el volumen del brillante.

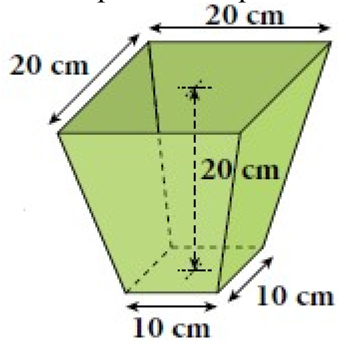
3. Una caja de bombones tiene forma de pirámide regular recta cuya base es un hexágono de 8 cm de lado. La apotema de la pirámide mide 12 cm. Calcula el volumen de dicha caja.

4. La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las *siete maravillas del mundo antiguo*. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?

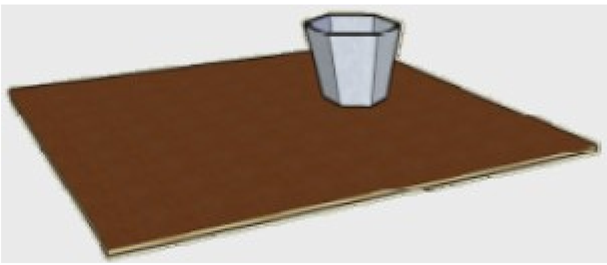
5. Se quiere construir un farolillo con forma de tronco de pirámide y con las caras laterales de cristal. Si la arista de la base mayor mide 24 cm, la arista de la base menor mide 8 cm, y la altura mide 15 cm, ¿cuánto costará el cristal de las caras laterales si se cobra a 24 € el metro cuadrado?



6. En un cine, las palomitas se venden en recipientes como el de la figura. Calcula el volumen de palomitas que se sirve cada vez que se llena el envase.



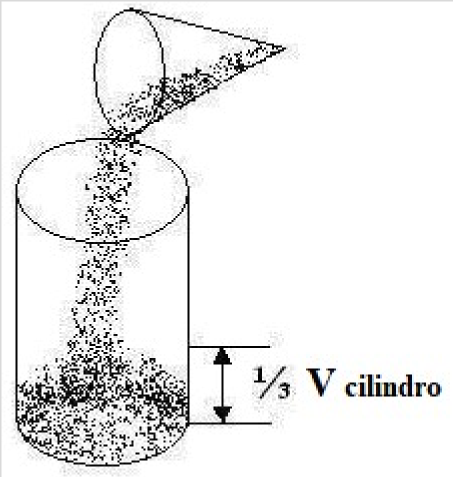
7. El recipiente de la imagen tiene 12 cm de altura y sus bases son hexágonos regulares de lados 3 y 6 cm y apotemas 2,6 y 5,2 cm. ¿Tiene más de un litro de capacidad?



8. El volumen de una pirámide cuadrangular de 6 dm de lado de la base es 48 dm^3. ¿Cuál es su altura?

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

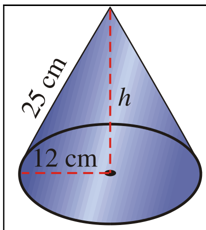
FICHA 9: Volumen de un cono

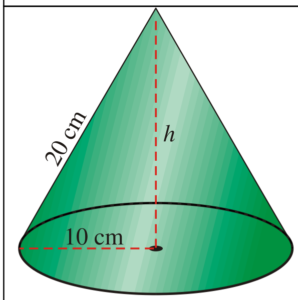


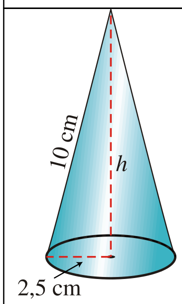
Como ocurre entre una pirámide y un prisma, el volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro de igual base y altura, es decir, es igual a la tercera parte del área de la base por la altura.

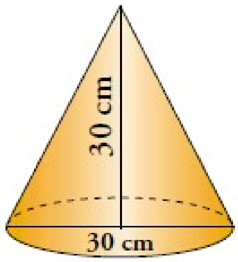
$$\text{Volumen Cono} = \frac{\text{Volumen Cilindro}}{3}$$

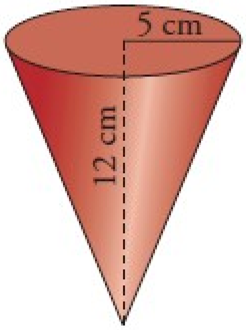
1. **Calcula el volumen de los siguientes conos:**

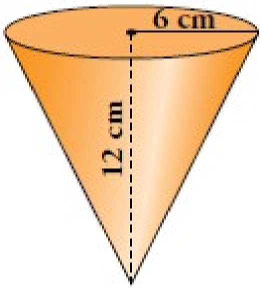


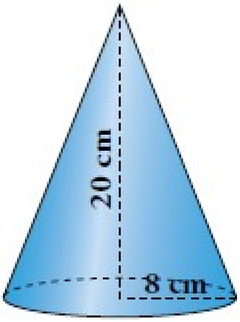


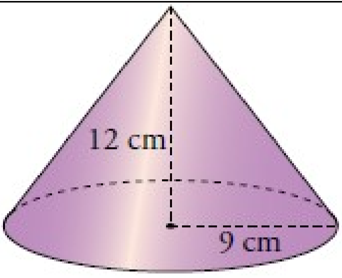












2. Calcula el volumen de un cono recto donde el radio de la base mida 6 cm y la generatriz 15 cm.

3. Calcula el volumen de un cono cuyo radio de la base mide 12 cm de altura y cuya generatriz mide 13 cm

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 10: Volumen de un tronco de cono

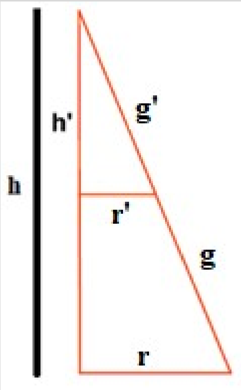
Recordemos que, el Teorema de Tales, nos da una relación entre los volúmenes de cuerpos semejantes, de la siguiente forma:

$$\boxed{r^3 = \frac{V'}{V}}$$

Siendo "r" la razón de semejanza: $\boxed{r = \frac{h'}{h}}$

Es decir: $\boxed{V' = r^3 \cdot V}$

Y en este caso, la razón de semejanza es:

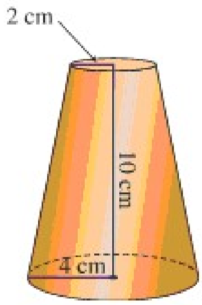


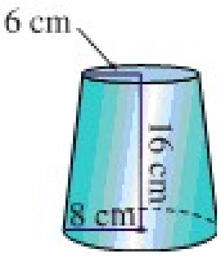
Por lo tanto: $\boxed{V' = r^3 \cdot V = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 \cdot V}$

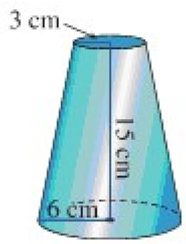
OJO: Podríamos calcular el volumen del tronco de cono calculando el volumen del cono grande y restando el volumen del cono pequeño:

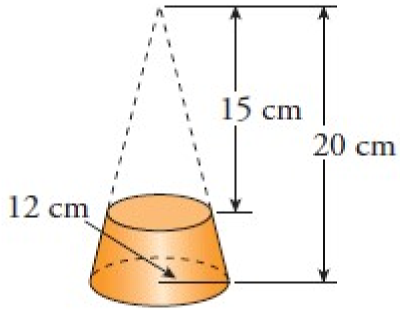
$$\Rightarrow \mathbf{V_{tronco} = V_{grande} - V_{pequeño}}$$

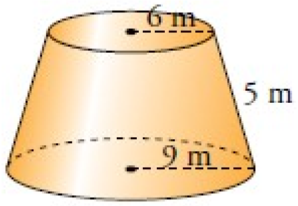
1. Calcula el volumen de los siguientes troncos de cono:

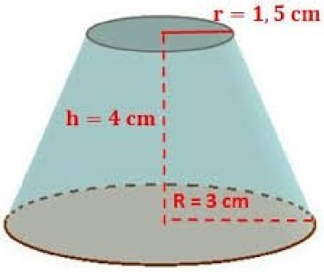


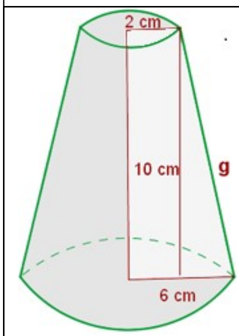



3 cm
15 cm
6 cm


15 cm
20 cm
12 cm


6 m
5 m
9 m


r = 1, 5 cm
h = 4 cm
R = 3 cm


2 cm
10 cm
g
6 cm

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 11: Problemas de volumen de un cono y de un tronco de cono

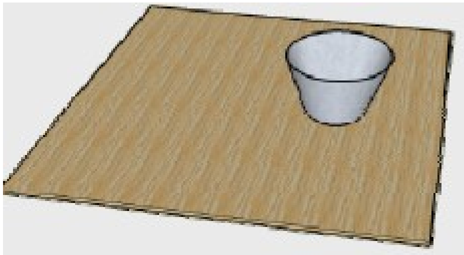
1. Un triángulo equilátero de 12 cm de lago gira alrededor de su altura, engendrando un cono. Halla su volumen.

2. La altura de un cono es de 16 m. el diámetro de la base mide igual que la altura. Halla el volumen del cono.

3. ¿Cuántos cm^3 de helado cabrán en un cono de helado lleno hasta el ras, si el cucurucho mide 12 cm de altura y la base tiene 5 cm de diámetro?

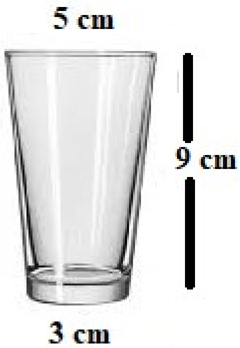
4. ¿Cuántas copas se pueden llenar con 6 litros de refresco, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura interior de 6,5 cm y un radio interior de 3,6 cm?

5. El recipiente de la imagen tiene 10 cm de altura y los radios de su bases son 3 y 5 cm. ¿Tiene más de un litro de capacidad?



6. ¿Cuántas copas puedo llenar con 11 litros de refresco, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura interior de 9 cm y un radio interior de 5 cm?

7. ¿Cuántos vasos como el de la imagen se pueden llenar con una garrafa botella de 5 litros de agua?



8. Con un saco de 50 litros de tierra vegetal, ¿cuántos tiestos como éste podemos llenar?

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

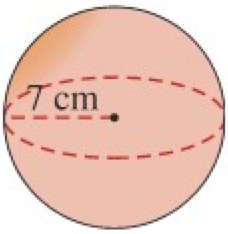
FICHA 12: Volumen de una esfera

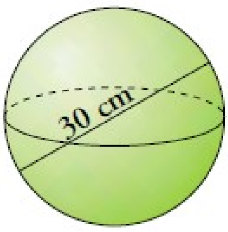
De forma experimental, podríamos calcular el volumen de una esfera introduciendo una bola en un vaso lleno de agua. El paso siguiente sería medir la cantidad de agua que se ha derramado. Pero este método es muy poco "práctico" pues no siempre vamos a poder tener una bola de las dimensiones que nos indiquen… por lo que necesitamos otros métodos más apropiados.

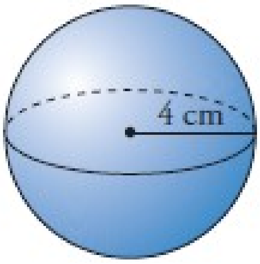
Sabiendo que el volumen de una esfera es el doble del volumen de un cono cuyo radio y altura es igual al radio de la esfera, tendremos (r=h)

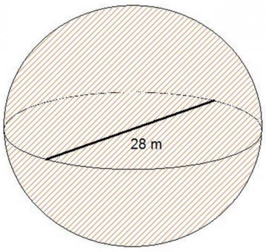
$$\text{Volumen Esfera} = 2 \cdot \frac{\text{Volumen Cilindro}}{3} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

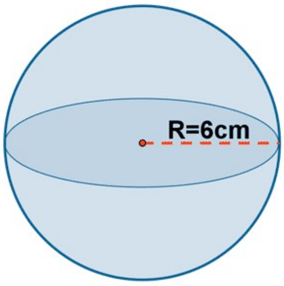
1. Calcula el volumen de las siguientes esferas:

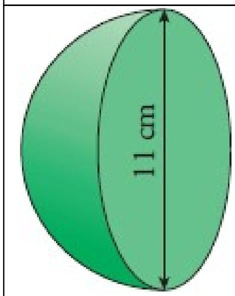


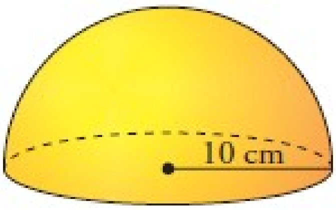


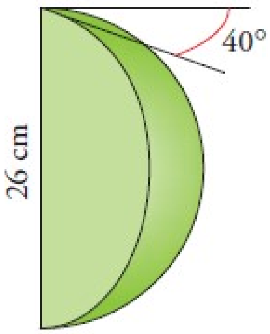

4 cm


28 m


R=6cm


11 cm


10 cm


40°
26 cm

UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

FICHA 13: Problemas de volumen de una esfera.

1. El volumen de un depósito de gas de forma esférica es de 14.130 m^3. Averigua cuánto mide el diámetro del depósito.

2. Un balón de fútbol tiene 69 cm de circunferencia. Halla el volumen que ocupa cuando está hinchado.

3. Calcula el volumen de un globo aerostático de forma esférica que tiene 12 cm de diámetro cuando está totalmente hinchado.

4. Averigua cuántos litros de agua caben en un depósito esférico de 6 m de diámetro.

5. Un iglú tiene forma de semiesfera de 3 m de diámetro. Halla su volumen.

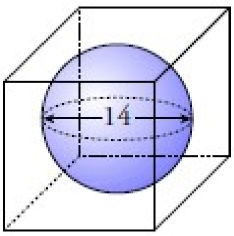
6. Calcula, aproximadamente, el volumen de la Tierra sabiendo que el radio mide 6.400 km.

7. El radio de la Luna es de 1.730 km. Calcula su volumen y compáralo con el volumen de la Tierra.

8. Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

9. Se introduce una bola de piedra de 14 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 14 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:

a. La cantidad de agua que se ha derramado.
b. La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

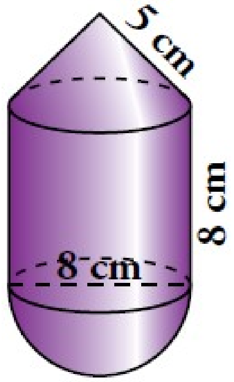


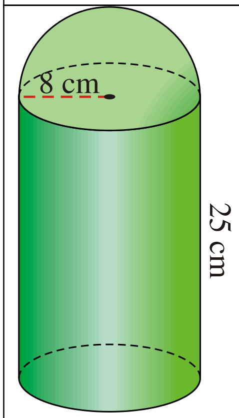
10. Se introduce una bola de plomo, de 1 cm de radio, en un recipiente cilíndrico de 3’1 cm de altura y 1’5 cm de radio. Calcula el volumen de agua necesario para llenar el recipiente.

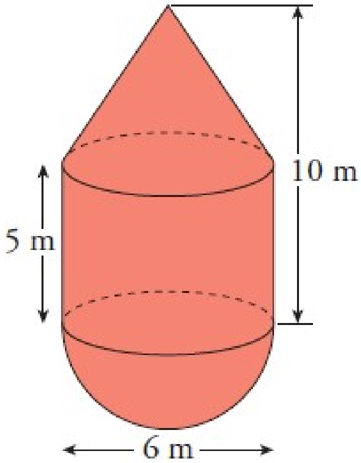
UNIDAD DIDÁCTICA 12: S. MEDIDA DE VOLUMEN

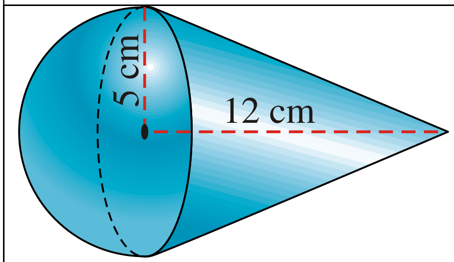
FICHA 14: Volumen de composición de figuras en el espacio.

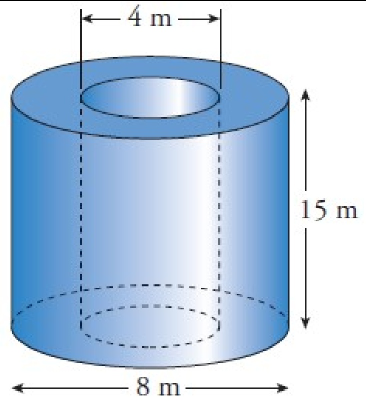
1. Calcula el volumen de las siguientes figuras en el espacio:

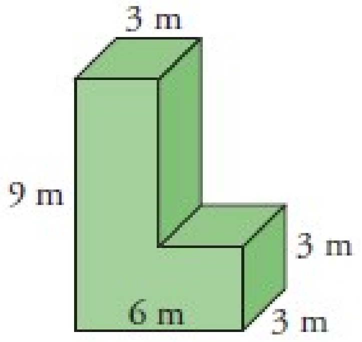


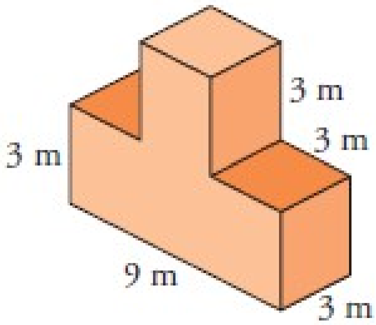


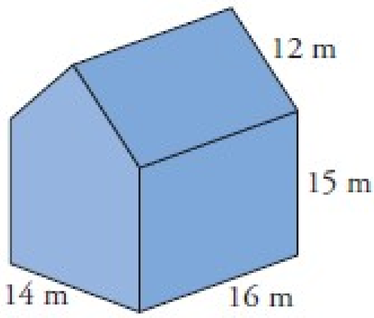


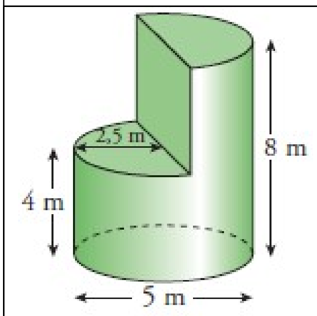



4 m
15 m
8 m


3 m
9 m
3 m
6 m
3 m


3 m
3 m
3 m
9 m
3 m

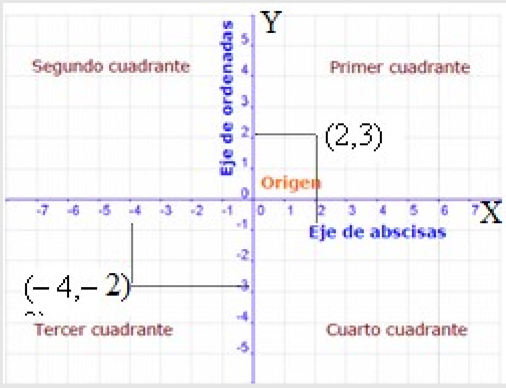

12 m
15 m
14 m
16 m


2,5 m
8 m
4 m
5 m

UNIDAD DIDÁCTICA 13: FUNCIONES

FICHA 1: Coordenadas cartesianas.

Un sistema de ejes coordenados (o cartesianos) está formado por dos ejes numéricos perpendiculares, uno horizontal o de abscisas (eje de las X), y otro vertical o de ordenadas (eje de las Y). Ambos ejes se cortan en un punto llamado origen, "*O*", o centro de coordenadas.



Las coordenadas del origen son (0, 0)

Los puntos sobre el eje X son de la forma (x, 0)

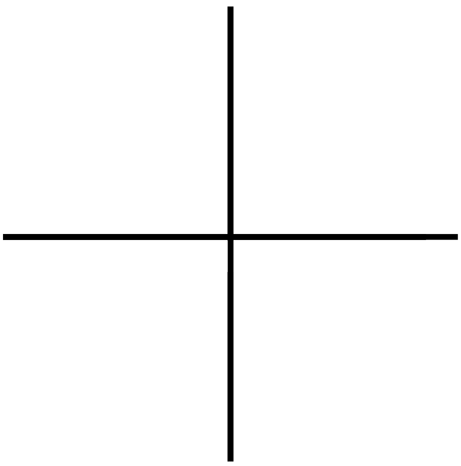
Los puntos sobre el eje Y son de la forma (0, y)

Observa cómo se representan los puntos (2, 3) y (– 4, – 2) en los ejes de coordenadas

1. Relaciona cada punto con el cuadrante o eje en el que está

(1, 3)	Cuarto cuadrante
(– 2, 0)	
(– 5, – 1)	Primer cuadrante
(– 7, 1)	
(4, – 1)	Eje de ordenadas
(– 2, – 3)	
(0, 6)	Eje de abscisas
(4, 2)	
(5, 0)	Tercer cuadrante
(– 3, 5)	
(1, – 5)	Segundo cuadrante
(0, – 4)	

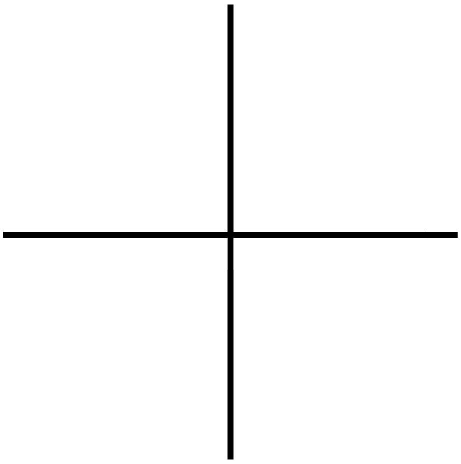
2. Indica las coordenadas de cuatro puntos de cada uno de los siguientes casos. Representa dichos puntos en estos ejes de coordenadas cartesianas:



a) Eje de abscisas:

b) Eje de ordenadas:

3. Indica las coordenadas de cuatro puntos de cada uno de los siguientes casos. Representa dichos puntos en estos ejes de coordenadas cartesianas:



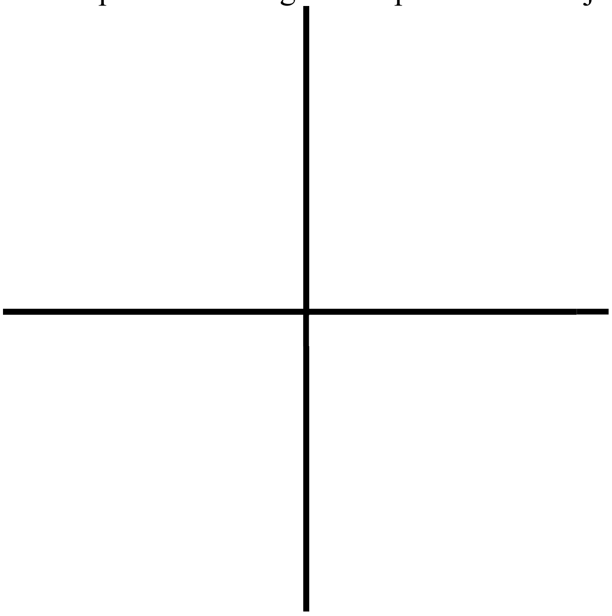
a) Primer cuadrante:

b) Segundo cuadrante:

c) Tercer cuadrante:

d) Cuarto cuadrante:

4. Representa los siguientes puntos en los ejes de coordenadas:



A = (1, 1) B = (2, 0)

C = (– 1, 2) D = (– 2, – 3)

E = (– 3, – 5) F = (2, – 4)

G = (2, 7) H = (– 5, 0)

I = (0, – 3) J = (– 7, 2)

K = (5, 7) L = (4, – 6)

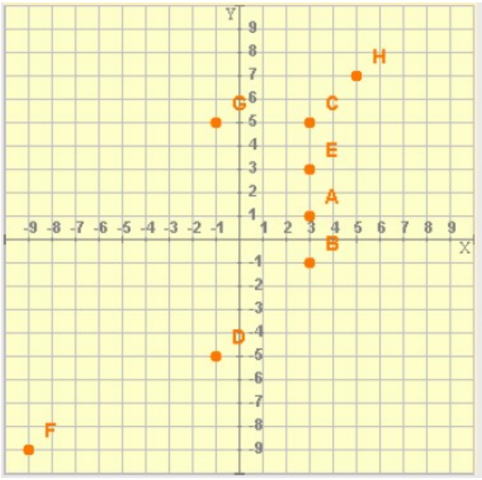
M= (– 4, 7) N = (6, – 1)

Ñ = (5, – 5) P = (– 5, 5)

Q = (0, 7) R = (5, 3)

S = (– 6, – 6) T = (– 7, – 2)

5. Completa la tabla con las coordenadas de los puntos representados en la siguiente imagen:



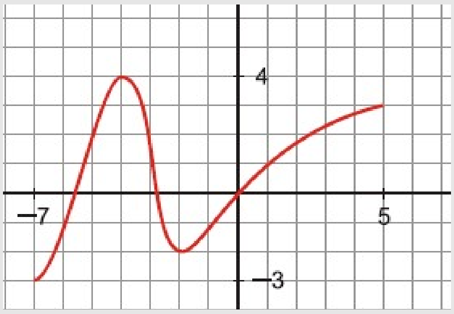
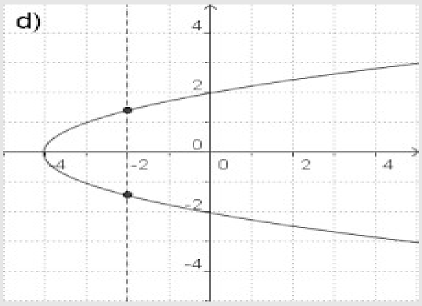
	X	Y
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

UNIDAD DIDÁCTICA 14: FUNCIONES

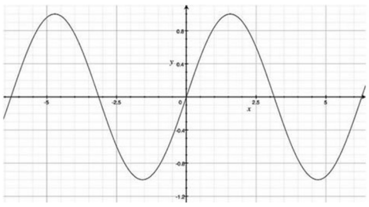
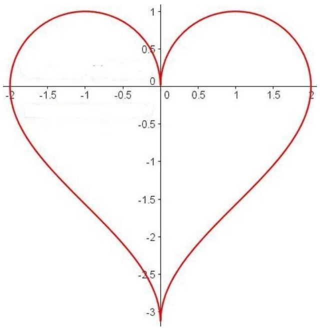
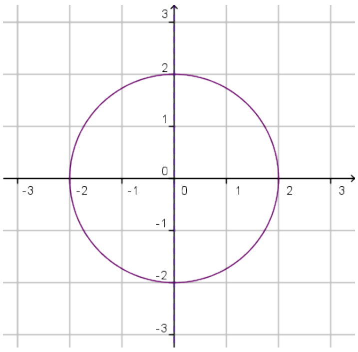
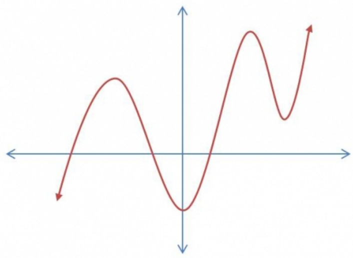
FICHA 2: Construcción de funciones.

Definición: Una función es una aplicación que asocia, a cada valor de la x (variable independiente), un único valor de la y (variable dependiente).

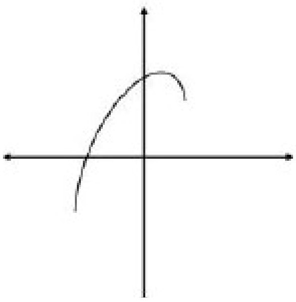
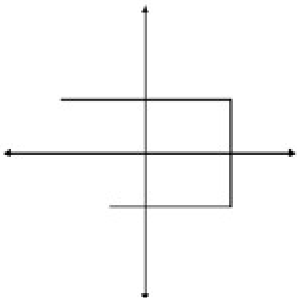
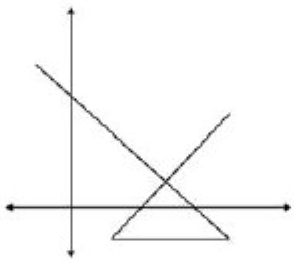
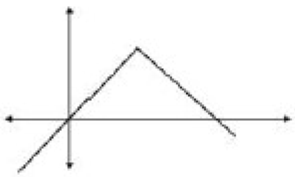
Se suele expresar: y = f(x)

Esta es una función: observa que si trazas rectas paralelas al eje de las Y, sólo cortan una vez a la gráfica de la función 	**Esta no es una función. Si trazas rectas paralelas al eje de las Y, verás que cortan en más de una vez a la gráfica de la función:** 

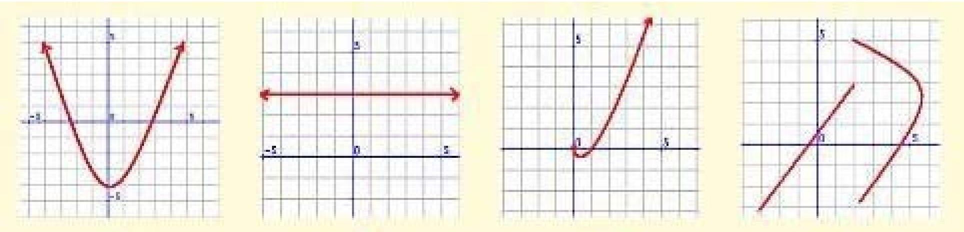
1. Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones:

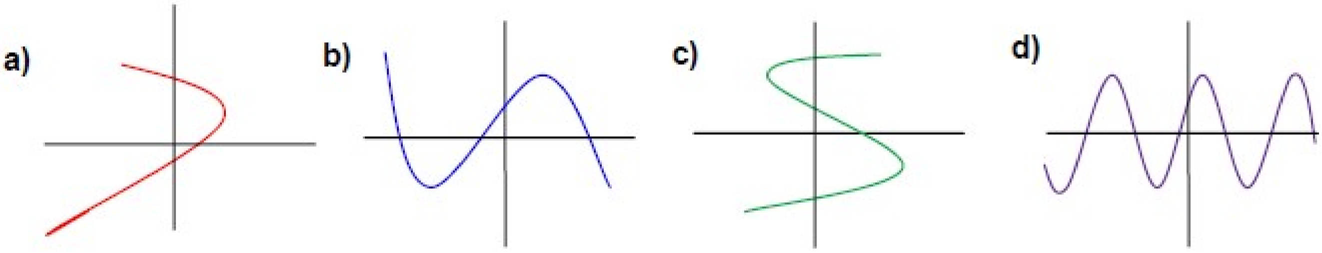
2. Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones:

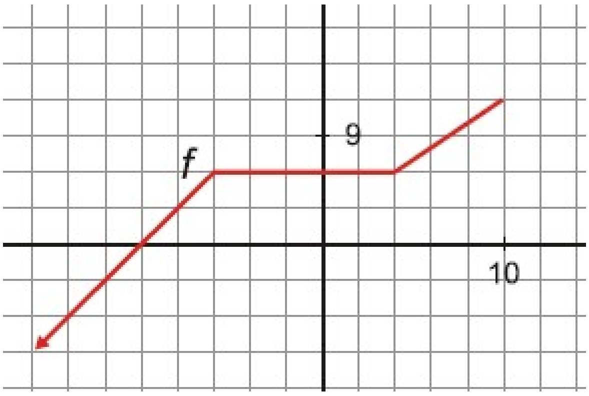
3. De entre las siguientes gráficas, hay una que no corresponde con una función. Indica cuál es justificando la respuesta.



4. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



5. Indica los puntos de la siguiente gráfica:



x	y
2	
	-1
-3	
-5	
	4
	-2
0	

6. Dibuja dos gráficas que se correspondan con funciones y otras dos que no se correspondan.

7. El precio de un bolígrafo en la papelería cercana es de 0’30 €.

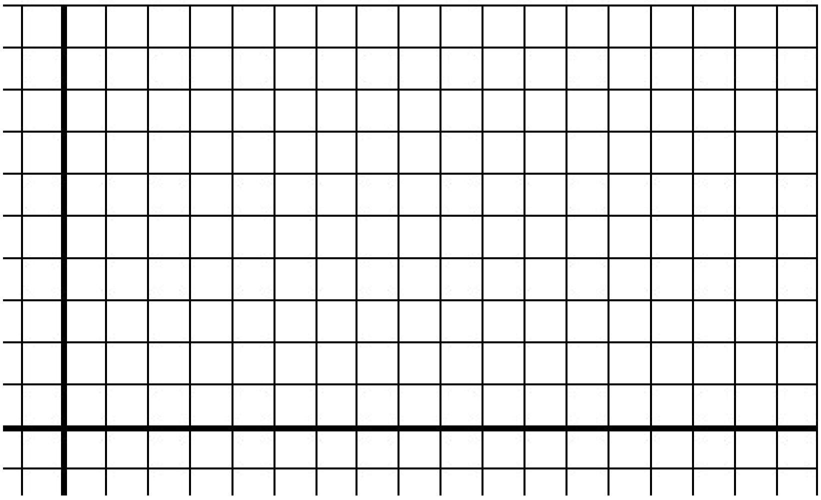
a. Calcula y escribe en la tabla siguiente el precio de los bolígrafos que se indican.

x(nº de bolígrafos)	1	2	3	4	5	7	8
y (Coste en €)							

b. Representa gráficamente los puntos de la tabla.

c. Fijándote en la gráfica, ¿cuánto cuestan 10 bolígrafos?¿Cuántos bolígrafos te dan por 3’60 €?

d. ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica? ¿Por qué?

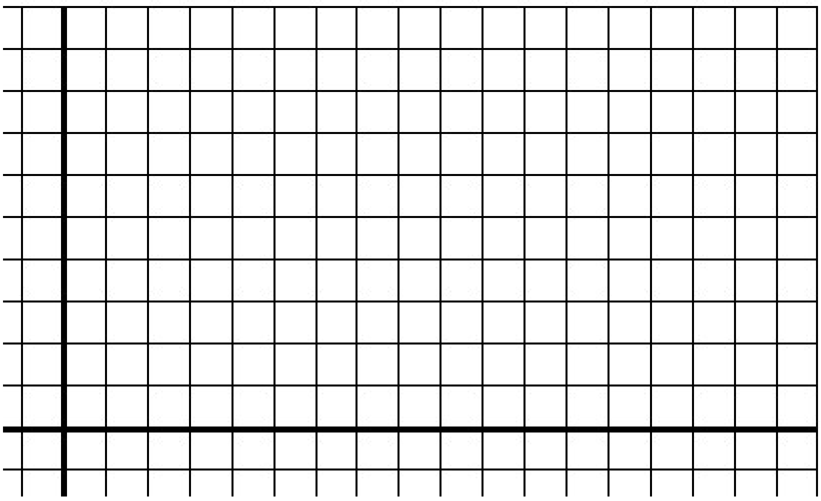


8. Queremos comprar patatas a 0’50 € el kilo. Completa la siguiente tabla:

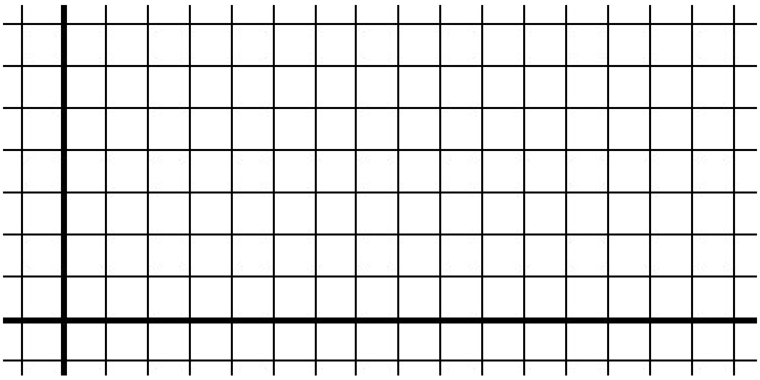
x(nº de kilos de patatas)	1	1’5	2	2’7	4	5	7
y (Coste en €)							

a. Representa gráficamente los puntos de la tabla.

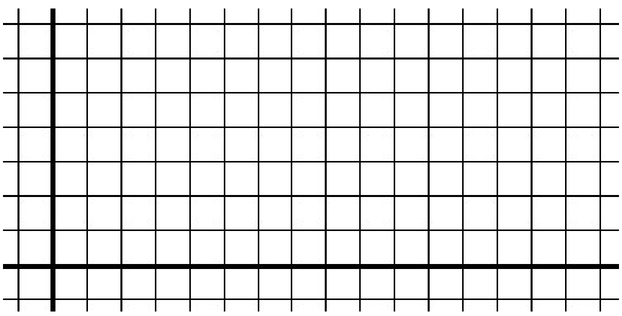
b. ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica? ¿Por qué?



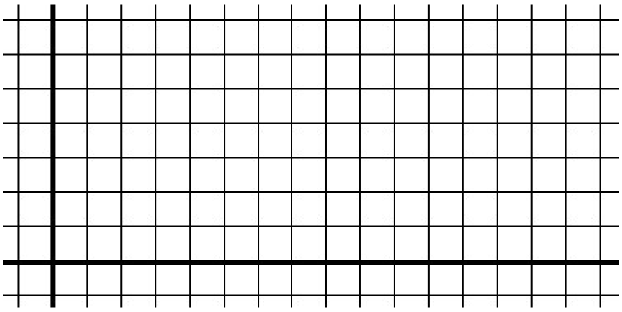
9. Construye una gráfica que describa la siguiente situación: Rosa tardó, esta mañana, 20 minutos en llegar desde su casa al supermercado situado a 2 km de su casa; después de 40 minutos comprando, regresó en taxi a su casa tardando 10 minutos en llegar. Tras permanecer 50 minutos en su casa, cogío el coche para ir a una cafetería situada a 6 km, para lo cual tardó un cuarto de hora. Al cabo de hora y cuarto, volvió a coger el coche y regresó a su casa, tardando en esta ocasión media hora debido al tráfico.



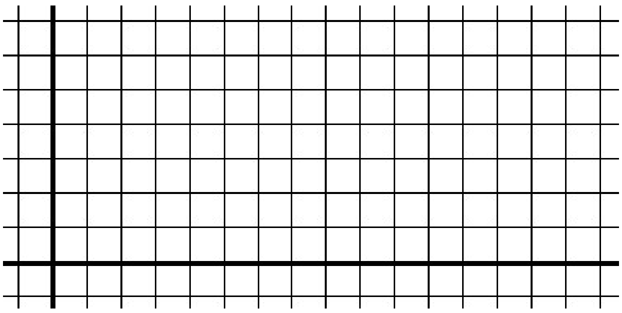
10. Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: A las 0 horas, la temperatura de una casa es de 15º C y, por la acción de un aparato que controla la temperatura, permanece así hasta las 8 de la mañana. En ese momento se enciende la calefacción y la temperatura de la casa va creciendo hasta que, a las 14:00 h, alcanza la temperatura máxima de 25º C. Paulatinamente, la temperatura disminuye hasta el momento en que se apaga la calefacción, a las 10 de la noche, volviendo a coincidir con la que había hasta las 8:00 horas.



11. Construye una gráfica que corresponda a los ingresos anuales que obtienen unos grandes almacenes, sabiendo que: Durante los dos primeros meses del año, aumentan paulatinamente debido a las ofertas; desde marzo hasta junio los ingresos van disminuyendo alcanzando, en ese momento, el mínimo anual. En julio y agosto vuelven a crecer los ingresos, alcanzando el máximo del año en agosto. A partir de entonces se produce un decrecimiento que llega a coincidir, en diciembre, con los ingresos realizados al comienzo del año.



12. Eduardo se va de vacaciones a una localidad situada a 400 km de su casa; para ello decide hacer el recorrido en coche. La primera parada, de 30 minutos, la hace al cabo de hora y media para desayunar, habiendo realizado la mitad del recorrido. Continúa su viaje sin problemas durante 1 hora, pero a 100 km del final sufre una parada de 15 minutos. En total tarda 4 horas en llegar a su destino. Representa la gráfica *tiempo– distancia recorrida*.



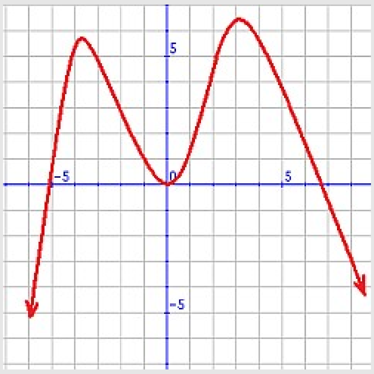
UNIDAD DIDÁCTICA 14: FUNCIONES

FICHA 3: Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos

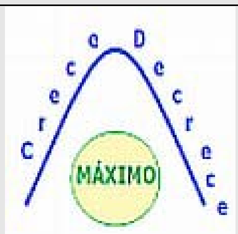
Definición: Se dice que una función es creciente en un intervalo cuando al aumentar la x, aumenta la y.

Definición: Se dice que una función es decreciente en un intervalo cuando al aumentar la x, disminuye la y.

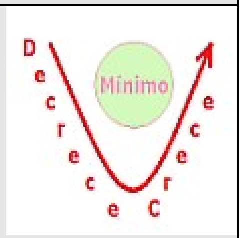
Definición: Se dice que una función es constante en un intervalo si el valor de la y no cambia



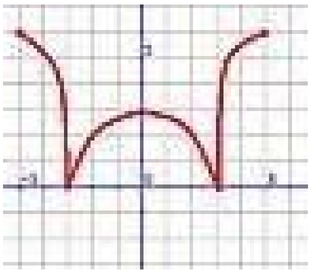
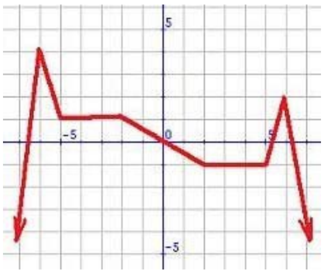
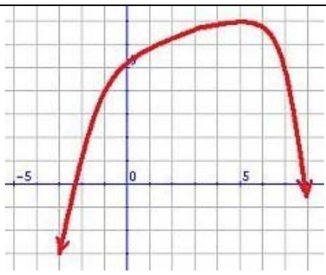
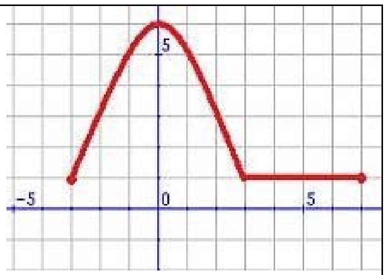
Definición: Una función presenta un máximo en un punto si es creciente a la izquierda de ese punto y decreciente a la derecha.

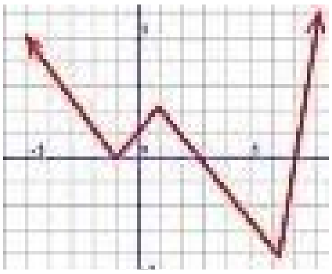
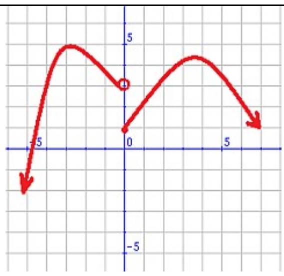
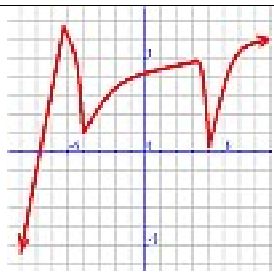
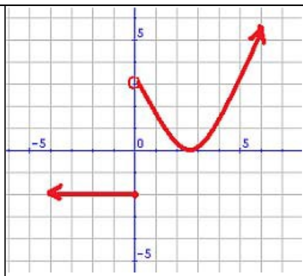
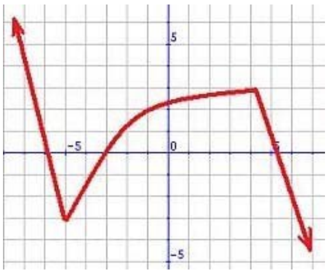
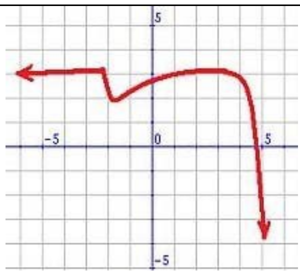
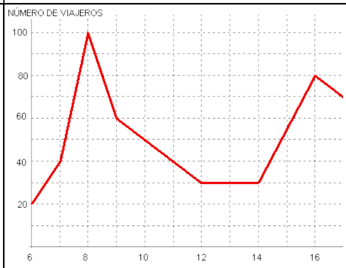
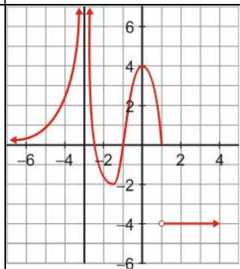


Definición: Una función presenta un mínimo en un punto si es decreciente a la izquierda de ese punto y creciente a la derecha.

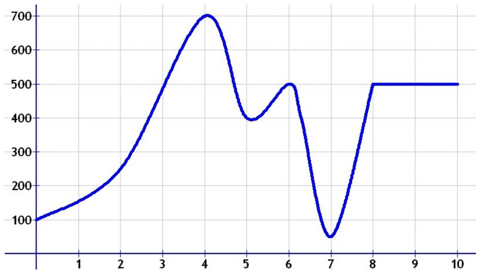
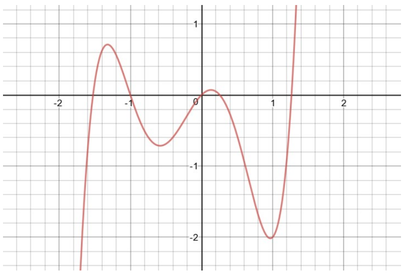
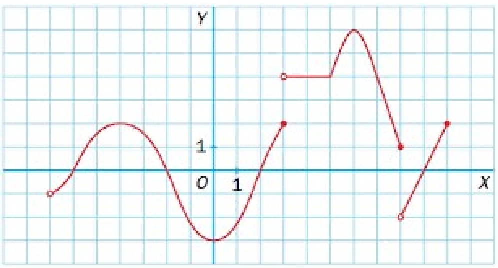
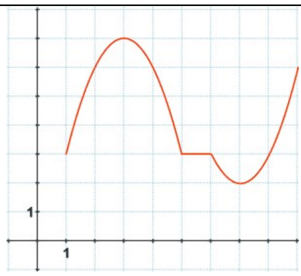
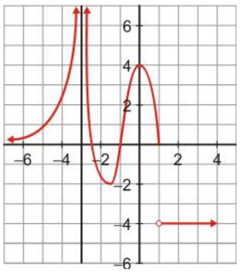


1. Indica las coordenadas de los puntos en los que creas que la función alcanza un máximo o un mínimo relativo:

2. Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

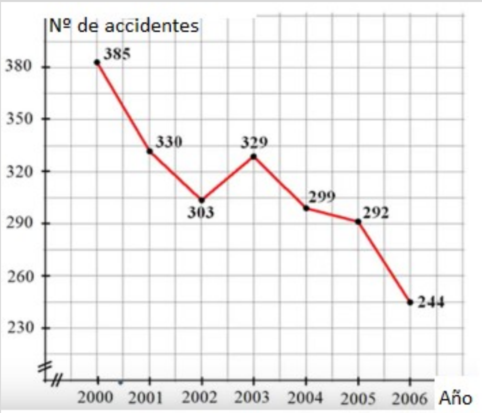
UNIDAD DIDÁCTICA 14: FUNCIONES

FICHA 4: Interpretación de gráficas de funciones

En un sistema de coordenadas cartesianas podemos representar la relación entre dos magnitudes, una será la variable independiente y se representa en el eje de abscisas y otra será la variable dependiente y se representa en el eje de ordenadas.

Ejemplo:

La gráfica nos muestra el número de accidentes de tráfico ocurridos entre los años 2000 y 2006. Y vemos que, por ejemplo:

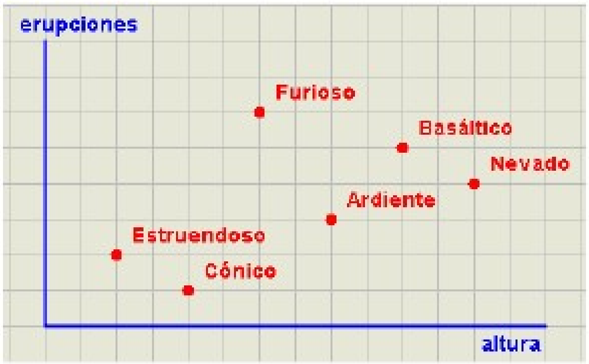


En el año 2000 se produjo el mayor número de accidentes, 385.

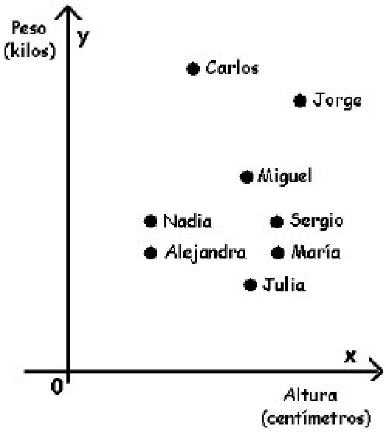
En el año 2006 se produjo el menor número de accidentes, 244

Entre los años 2000 y 2002, así como entre 2003 y 2006 descendió el número de accidentes pero en el año 2003 hubo un "repunte".

1. A la vista de la gráfica, indica:
   - **a.** El nombre del volcán más alto
   - **b.** El nombre del volcán en el que se han producido más erupciones



2. Los puntos del gráfico muestran la altura (en centímetros) y el peso (en kg) de varios alumnos de 1º de ESO. Responde:
   - **a.** ¿Quién es el chico que más pesa?
   - **b.** ¿Quién es el chico más alto?
   - **c.** ¿Quién es el chico que menos pesa?
   - **d.** Indica dos chicas que pesen lo mismo
   - **e.** Indica un chico y una chica que pesen lo mismo
   - **f.** Di el nombre de un chico que sea más bajo que Miguel
   - **g.** Di el nombre de una chica que pese más que María
   - **h.** ¿Quién es la chica más alta?



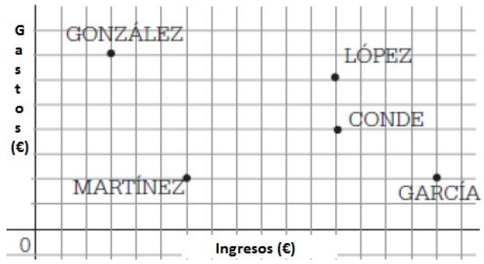
3. En el siguiente gráfico se muestran los ingresos y gastos de 5 familias.

a. ¿Qué familia gasta más?

b. ¿Qué familia gasta menos?

c. Indica dos familias que ganen lo mismo y otras dos que gasten lo mismo.

d. ¿Qué familia dirías que ahorra más?



4. A partir de la gráfica de ingresos obtenidos durante los doce meses del último año por una empresa, sabrías decir:

a. ¿Cuáles fueron los meses en que más ingresos obtuvo?

b. Qué cantidad ingresó en esos meses?

c. ¿Y los meses en que obtuvo menos ingresos?

d. ¿Cuánto dinero fue?

e. ¿Cuáles fueron los ingresos en el mes de marzo?

f. ¿Y en el mes de agosto?

g. ¿Y en diciembre?

5. Esta mañana he salido a dar un paseo y he realizado el siguiente gráfico con los datos que he tomado.

a. ¿Cuánto ha durado el paseo?

b. ¿A qué distancia se encuentra el punto más alejado de mi casa?

c. ¿Cuándo dirías que he ido más rápido, a la ida o a la vuelta? Explica por qué.

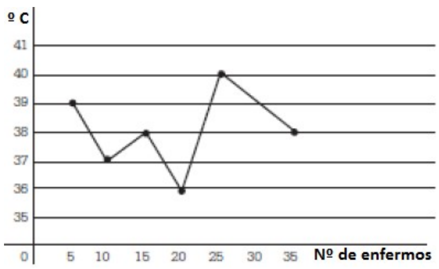
6. La siguiente gráfica muestra la temperatura de los enfermos de una planta de un hospital a las 6 de la tarde. Podrías decir:

a. ¿Cuántos enfermos hay con 38º?

b. ¿Cuál es la temperatura máxima alcanzada?

c. ¿Cuántos enfermos no tienen fiebre?

d. ¿Cuántos enfermos hay en la planta?

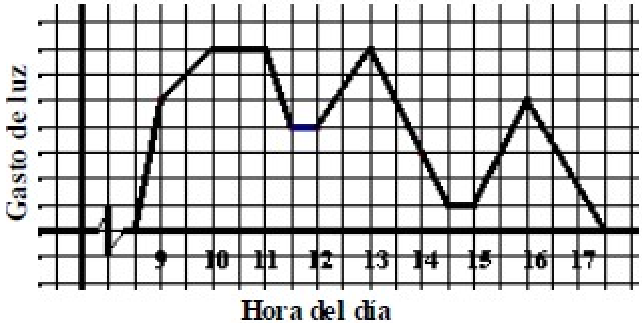


7. La siguiente gráfica muestra el gasto de luz de un instituto durante las horas del día

a. ¿A qué horas se gastó más?

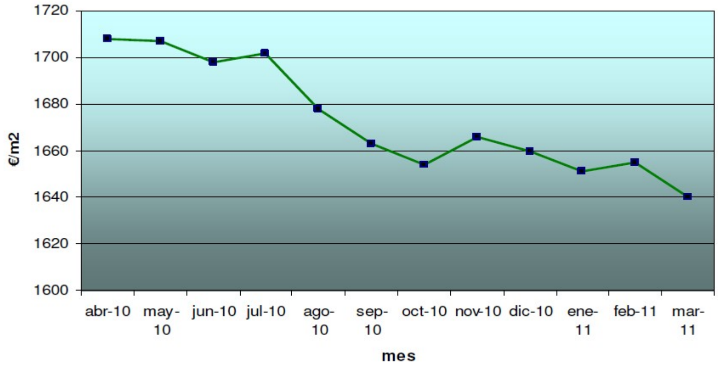
b. ¿En qué horas no hubo gasto?

c. Describe, con tus palabras, lo que refleja la gráfica



8. El siguiente gráfico nos muestra la evolución del precio de la vivienda desde abril del año 2010 hasta el mes de marzo de 2011.

a. ¿Qué variables se representan?



b. ¿Cuál es el precio máximo que alcanzó el m^2 en los 12 meses? ¿En qué mes sucedió?

c. ¿Entre qué meses se experimentó un mayor descenso de los precios?

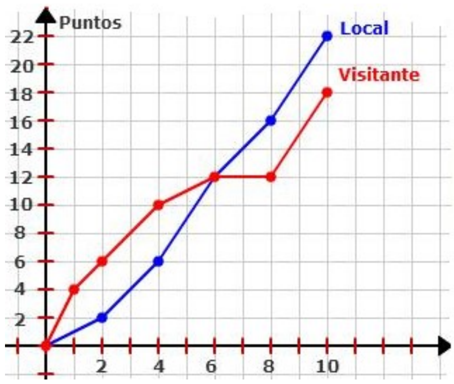
d. ¿En qué mes se ha producido la mayor subida de precios?

9. Las siguientes gráficas muestran los puntos obtenidos por dos equipos, en un partido de baloncesto, durante los primeros minutos.

a. ¿Cuántos puntos anota el equipo visitante entre los minutos 6 y 8?

b. Al final del primer periodo, ¿quién va por delante en el marcador?

c. ¿En qué minuto se encuentran empatados? ¿A cuántos puntos?



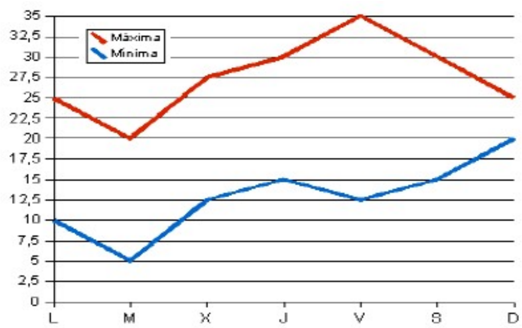
d. Haz una breve descripción de cómo ha ido el “primer tiempo”

10. La siguiente gráfica representa las temperaturas máxima y mínima de la pasada semana.

a. ¿Qué día se alcanzó la mayor temperatura? ¿Cuántos grados hubo?

b. ¿Cuál fue la temperatura más baja? ¿Qué día se alcanzó?

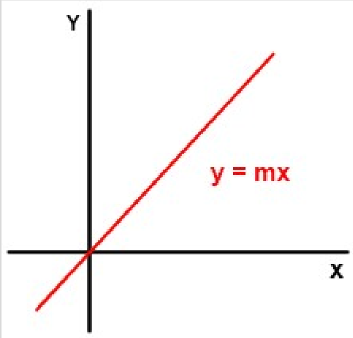
c. ¿Qué día hubo la mayor diferencia de temperaturas? ¿Cuál fue esa diferencia?



UNIDAD DIDÁCTICA 14: FUNCIONES

FICHA 5: Función de proporcionalidad

La expresión algebraica “y = mx” es una “función de proporcionalidad”, y se representa mediante una recta.



– La gráfica de estas funciones se caracteriza porque todas pasan por el origen de coordenadas.

– La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas (X) viene representada por el número m, que recibe el nombre de <u>pendiente</u>. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje X, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forma con la horizontal.

Para representar estas funciones, damos valores a la variable “x” y calculamos el valor de la variable “y”.

Ejemplo: $y = 3x$

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

6. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad

$y = x$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y = 2x$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y = -3x$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y = \frac{1}{2}x$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

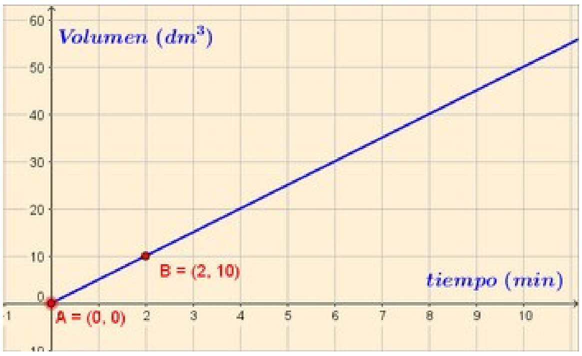
$y = -x$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

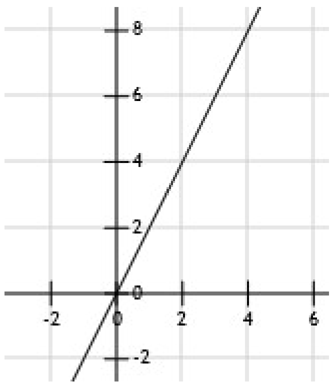
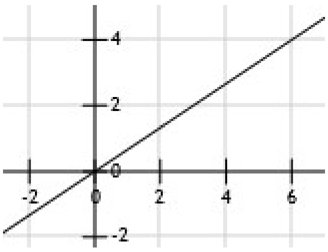
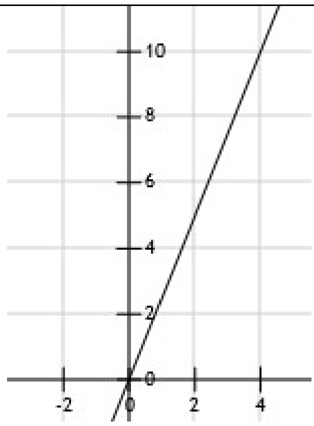
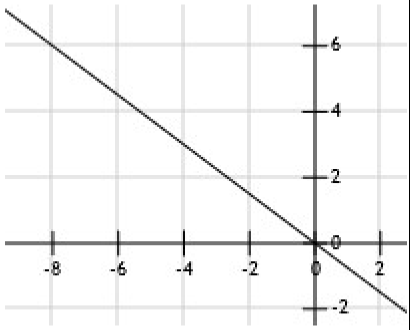
7. Escribe la función de proporcionalidad (y = mx) que pasa par los puntos:

x = 2, y = 6	(– 2, 8)	P = (1, 7)	Q = (2, – 5)
y =	y =	y =	y =

8. Escribe la función que se corresponde con la siguiente gráfica:



9. Escribe las funciones que se corresponden con las siguientes gráficas:

10. Un kg de patatas cuesta 55 céntimos.

4. Obtener la función que define el coste de las patatas (**y**) en función de los kg comprados (**x**).

5. ¿Cuánto costarán 3’5 kg?

6. ¿Qué cantidad podremos comprar si sólo disponemos de un billete de 5 €?

11. Un grifo vierte agua a un depósito dejando caer cada minuto 25 litros. Formar una tabla de valores apropiada para representar la función "capacidad" en función del tiempo. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar una piscina de 50 m^3?

12. Los paquetes de folios que compra un determinado instituto constan de 500 folios y cuestan 3 €.

5º) Formar una tabla que nos indique el precio de 1, 2, ..., 10 folios.

6º) ¿Qué tipo de función se obtiene? ¿Cuál es la ecuación?

13. Pasada la Navidad, unos grandes almacenes hacen en todos los artículos un 20% de descuento.

12. ¿Cuál será el precio rebajado de unas zapatillas de deporte que costaban 45 €?

13. ¿Y de un chándal que costaba 60 €?

14. Si llamamos **x** al antiguo precio del artículo e **y** al precio rebajado, ¿qué función se obtiene?

14. Si un fontanero hace una reparación de 240 € y nos cobra un 21 % de IVA, ¿a cuánto ascenderá la factura con el IVA? ¿Y si la reparación costara 50 €? Obtener la expresión algebraica general correspondiente al precio del trabajo del fontanero y la cantidad que se paga.

15. Se quiere abrir un pozo de forma cilíndrica de diámetro 2 m. Expresar el volumen de agua que cabe en él en función de la profundidad *h*. ¿Qué tipo de función se obtiene?

UNIDAD DIDÁCTICA 14: FUNCIONES

FICHA 6: Pendiente de una recta

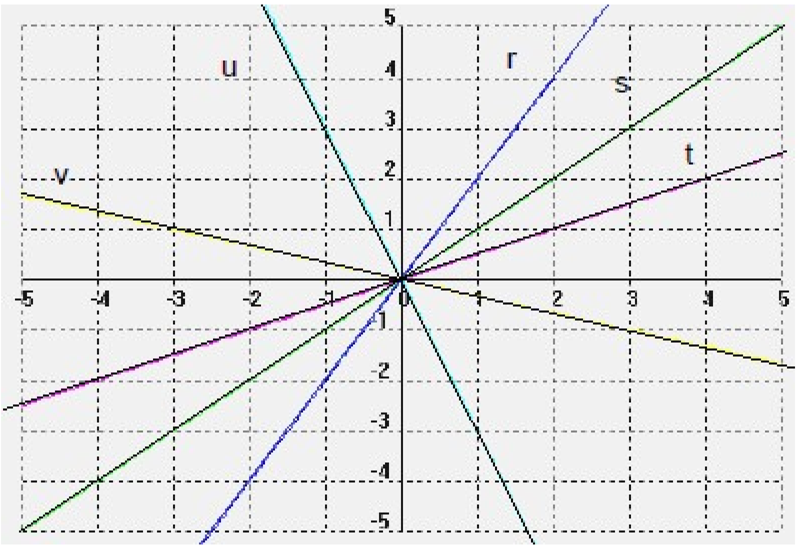
Hemos dicho que, dada la función y = mx, el número "m" se denomina pendiente, e indica la inclinación (el ángulo) que forma la recta con el eje OX.

El número "m" indica lo que asciende (o desciende) y por cada unidad que avanza x.

Ejemplos:

$y = 2x$	$\Rightarrow$	$m = 2$
$y = -2x$	$\Rightarrow$	$m = -2$
$y = \frac{3}{5}x$	$\Rightarrow$	$m = \frac{3}{5}$
$y = -\frac{6}{7}x$	$\Rightarrow$	$m = -\frac{6}{7}$
$y = 7x$	$\Rightarrow$	$m = 7$

1. Calcula las ecuaciones de las siguientes rectas:



2. Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

$y = 2x - 3$	$y = 5 - x$	$y = 2x + 4$	$y = \frac{x+1}{2}$
$y = \frac{2x-1}{2}$	$y = \frac{x+2}{3}$	$y = 2 - 3x$	$y = \frac{1}{2}x$

UNIDAD DIDÁCTICA 14: FUNCIONES

FICHA 7: Función lineal. Representación

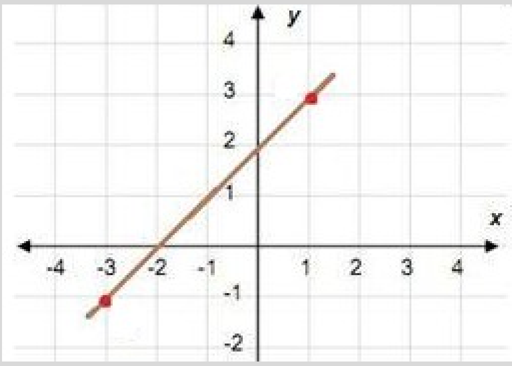
La expresión algebraica "y = mx + n" es una "función lineal", y se representa mediante una recta donde "m" es la "pendiente" de la recta y "n" es la "ordenada en el origen".

Para representar "rectas", damos valores a la variable "x" y calculamos el valor de la variable "y".

Ejemplo:

y = x + 2

x	**y**
0	**2**
1	**3**
– 1	**1**
– 2	**0**
– 3	**– 1**



1. Calcula los valores en las siguientes funciones lineales:

y = x

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = x + 4

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 2x + 4

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 1 – 2x

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 5 – x

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 3x – 1

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

y = 3x + 2

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y=\frac{x+1}{2}$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y=\frac{2x-1}{2}$

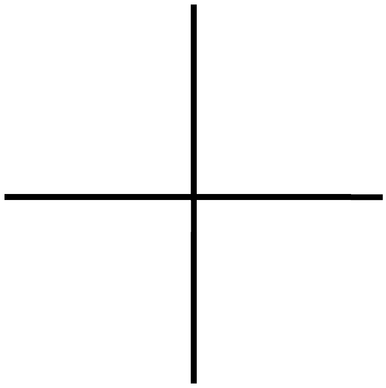
x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

$y=\frac{x+2}{3}$

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

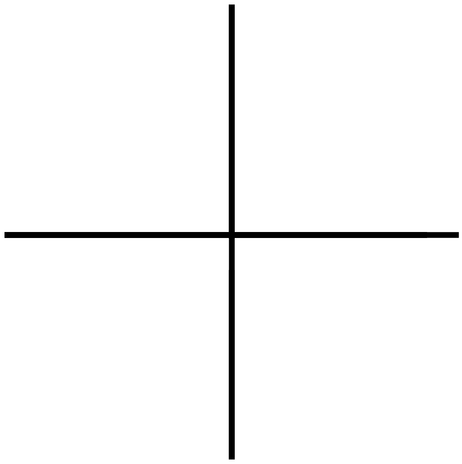
2. Representa sobre los ejes de coordenadas la recta de ecuación y = x – 1 calculando los valores correspondientes de la y:

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	



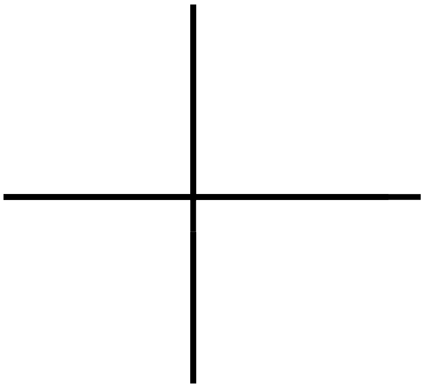
3. Representa sobre los ejes de coordenadas la recta de ecuación y = 2 – x calculando los valores correspondientes de la y:

x	y
0	
1	
– 1	
2	
2	
3	
– 3	

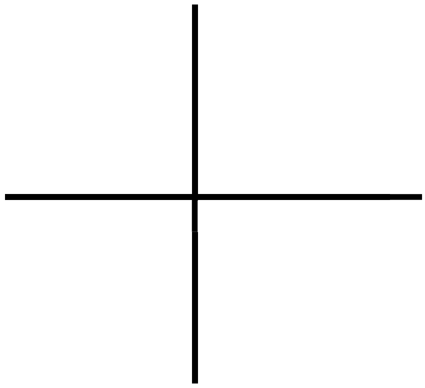


4. Representa las siguientes rectas sobre los ejes de coordenadas:

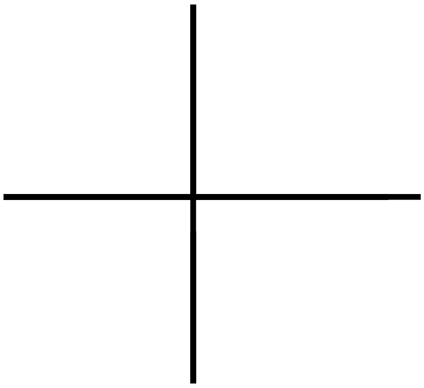
$y = 2x - 1$



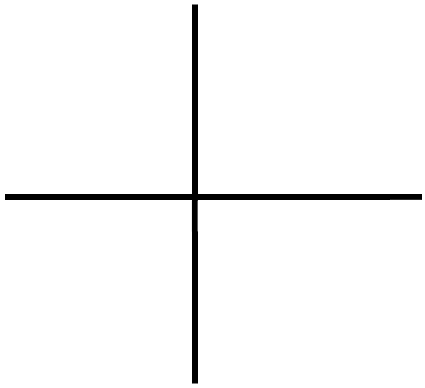
$y = 3x + 1$



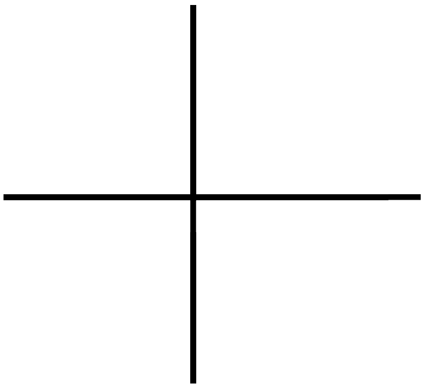
$y = 1 - x$



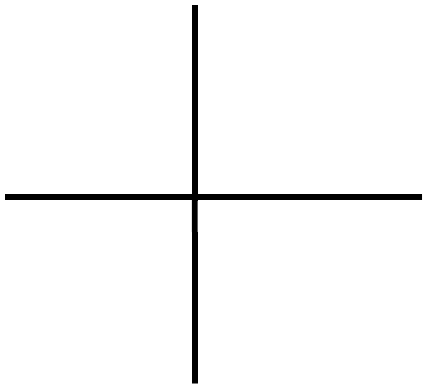
$y = 1 - 2x$



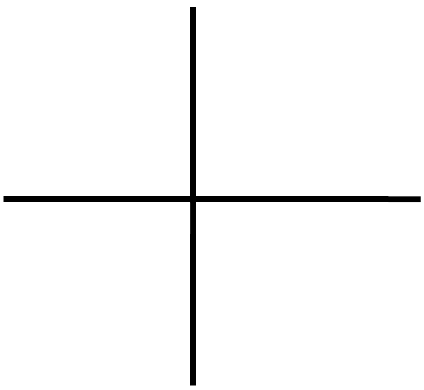
$y = 3x + 2$



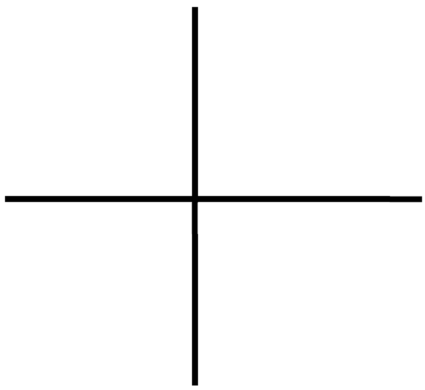
$y = 2 - 2x$



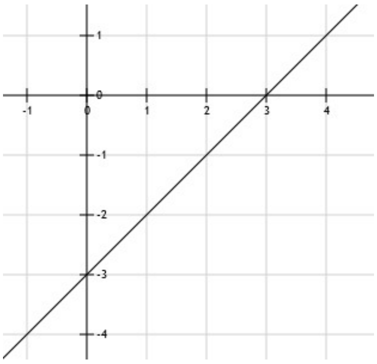
$y = x + 5$

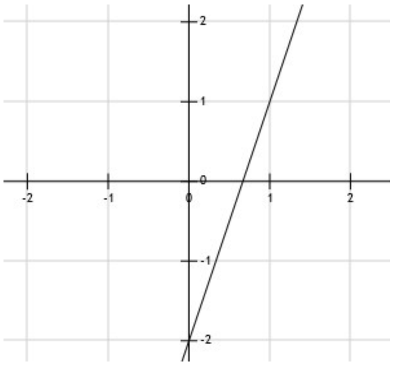


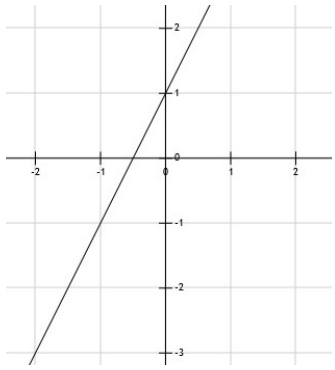
$y = 5 - 2x$



5. Indica qué recta se corresponde con cada una de las siguientes gráficas



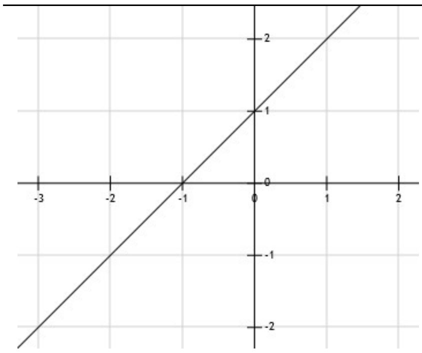


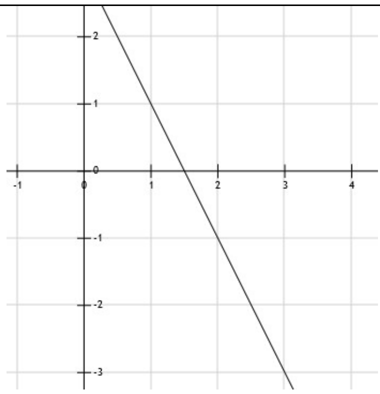


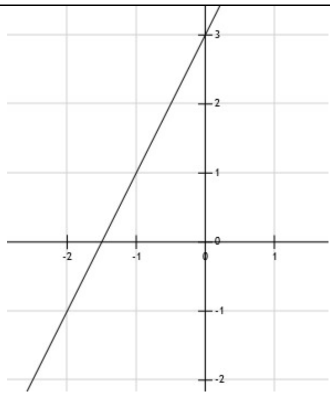
y =

y =

y =







y =

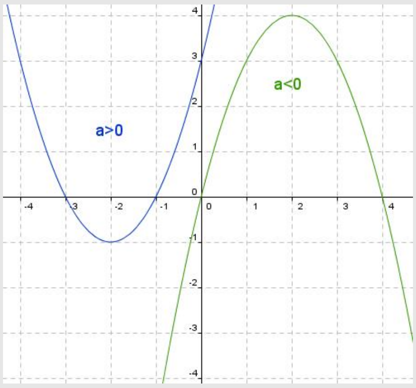
y =

y =

= 2x + 1 y = – 2x + 3 y = x + 1 y = 2x + 3 y = 3x – 2 y = x – 3

UNIDAD DIDÁCTICA 14: FUNCIONES

FICHA 8: Función cuadrática. Parábolas



Las funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, se llaman funciones cuadráticas y cumplen las siguientes propiedades:

1) La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

2) Si $a > 0$, la parábola está abierta hacia arriba.

3) Si $a < 0$, la parábola está abierta hacia abajo.

Podemos calcular su vértice de la siguiente forma:

$$V = \left(\frac{-b}{2a},\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Y los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

Con el eje OX: haciendo $y = 0$

Con el eje OY: haciendo $x = 0$

1. Calcula el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

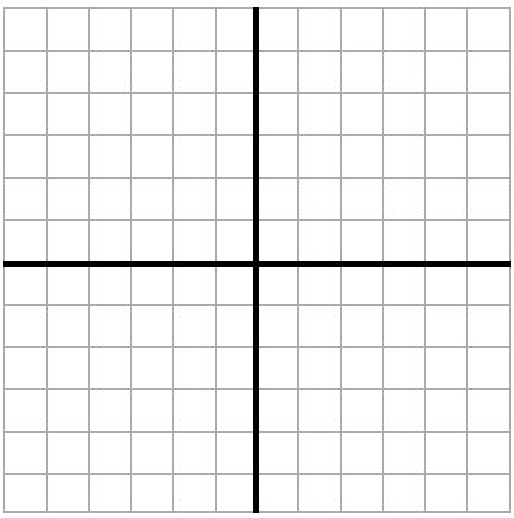
$y = x^2 + 2x + 1$	$y = x^2 - 2x - 3$	$y = x^2 - 2x$
$y = -x^2 + x + 1$	$y = x^2 - 5$	$y = -x^2 - 3x$
$y = -x^2 - 5x - 1$	$y = x^2 + 4x - 2$	$y = x^2 + 1$

2. Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones cuadráticas:

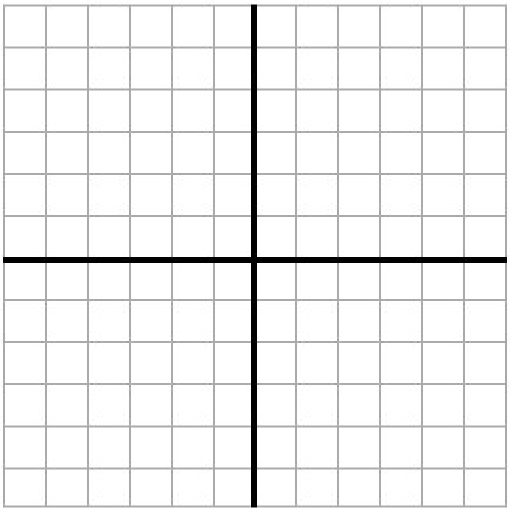
$y = x^2 - 2x + 1$	$y = x^2 - 4x + 3$
$y = x^2 - x$	$f(x) = x^2 - 2x - 3$
$y = -2x^2 + 4x$	$y = -x^2 + 2x - 2$

3. Representa las siguientes funciones cuadráticas:

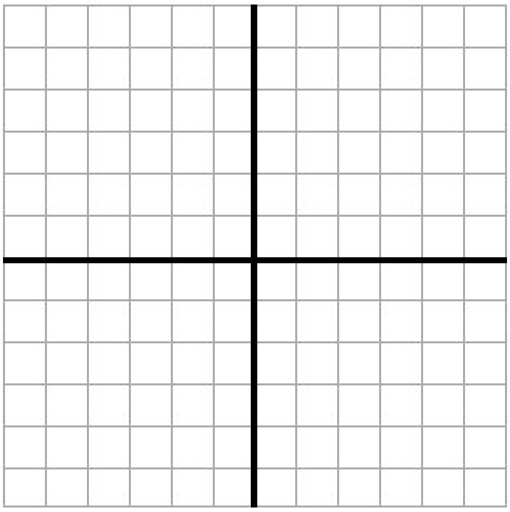
$y = x^2$



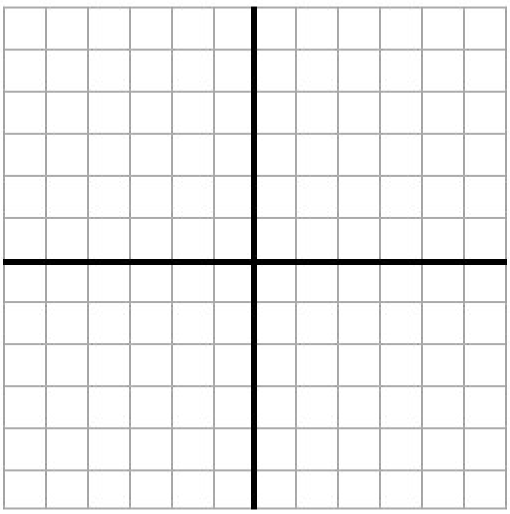
$y = -x^2$



$y = 2x^2$

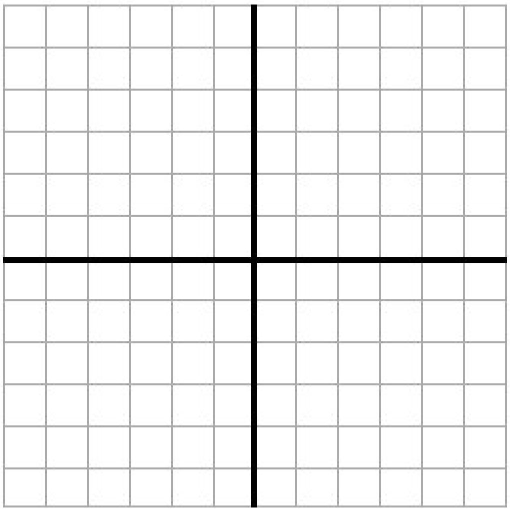


$y = -2x^2$

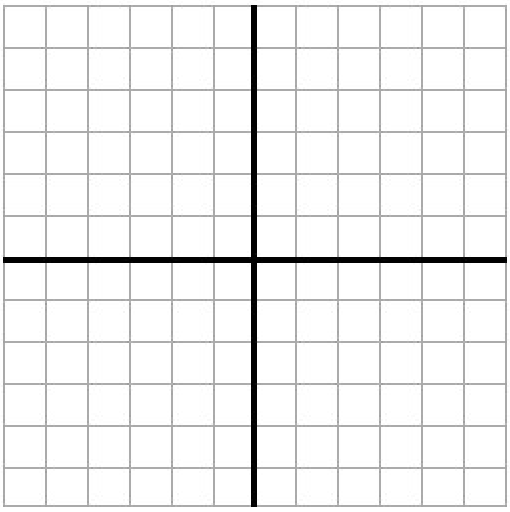


4. Representa las siguientes funciones cuadráticas:

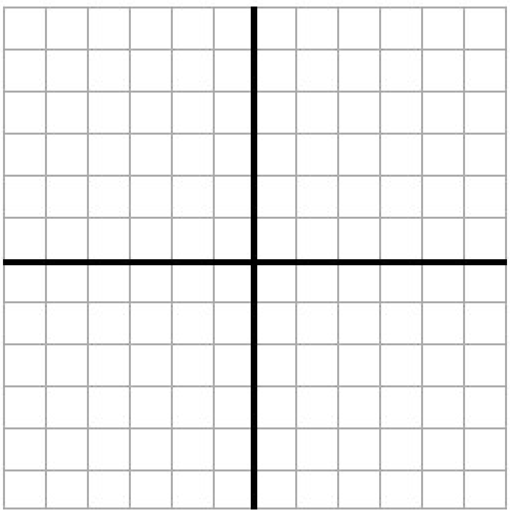
$y = x^2 + 1$



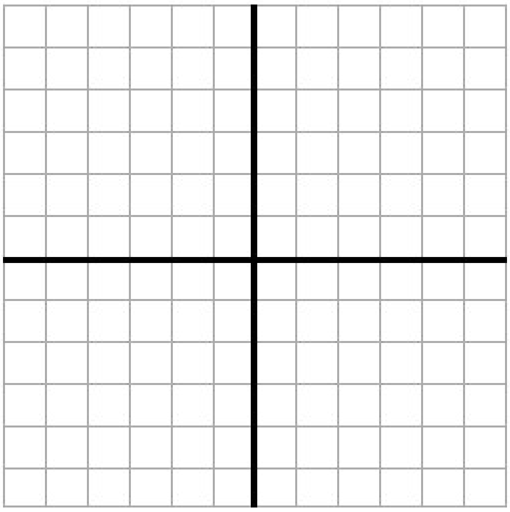
$y = x^2 - 3$



$y = -x^2 + 4$

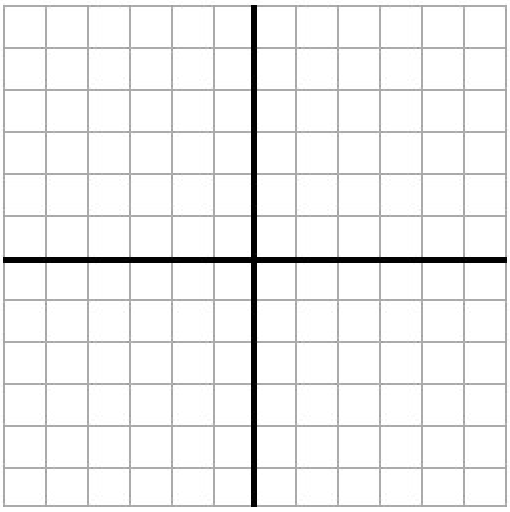


$y = -x^2 + 3$

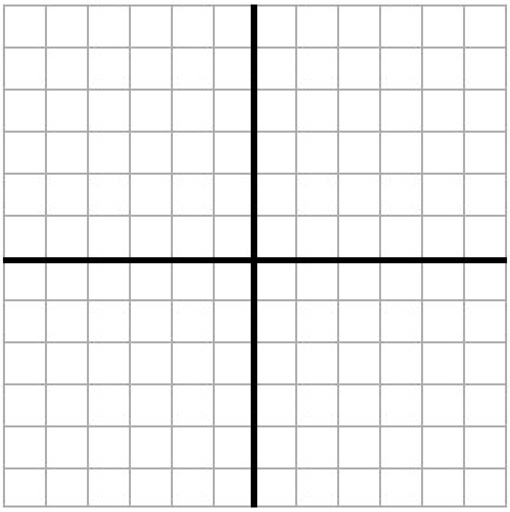


5. Representa las siguientes funciones cuadráticas:

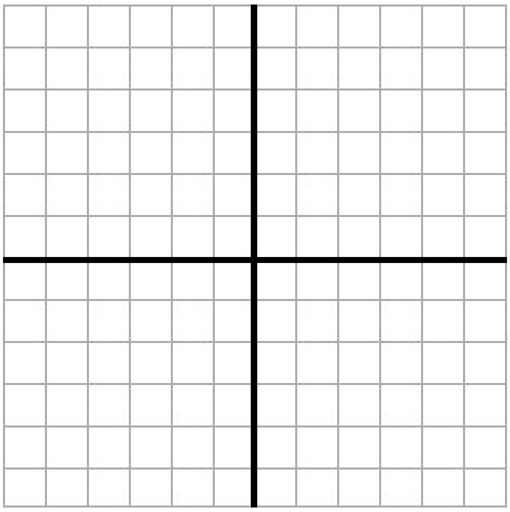
$y = x^2 - 6x$



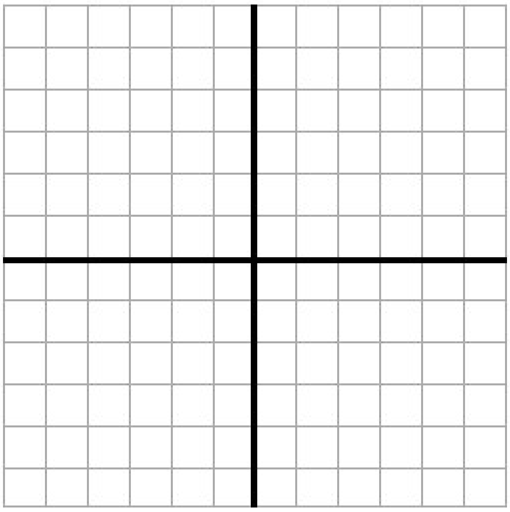
$y = x^2 - 7x + 6$



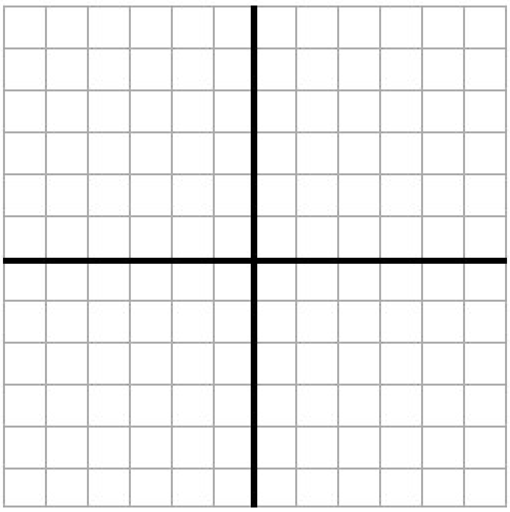
$y = x^2 - 3x + 2$



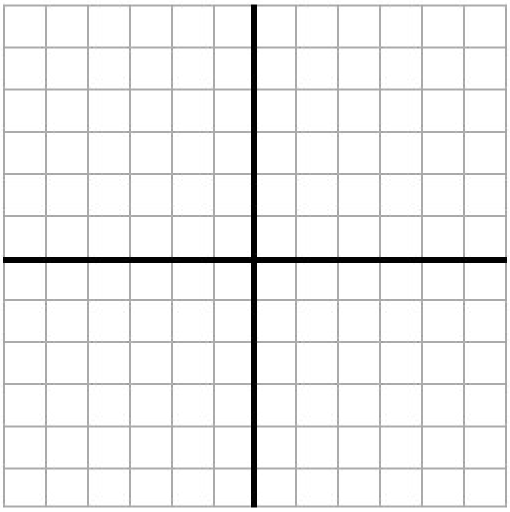
$y = x^2 - 6x + 10$



$y = x^2 - 4$



$y = -x^2 - 4x - 2$

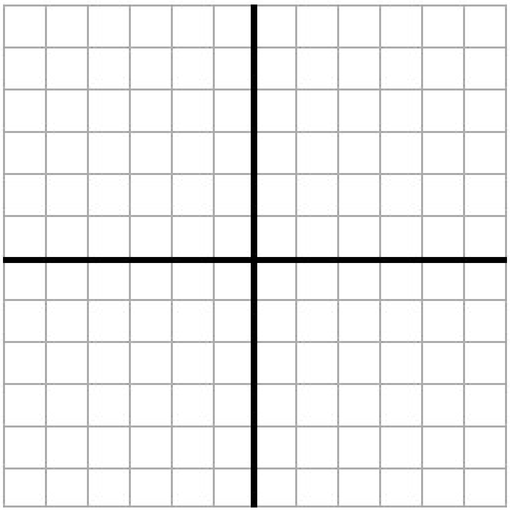


6. Sea la función $f(x) = x^2 + mx + n$. Determina m y n sabiendo que la gráfica pasa por los puntos (1, 0) y (– 3, 4)

7. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes?:

$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 2$	$h(x) = x^2 - 4$	$m(x) = x^2 + 4$

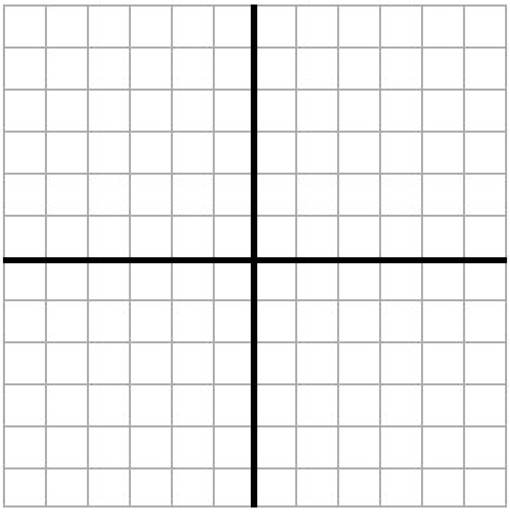
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.



8. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = -2x^2$	$g(x) = -2x^2 + 2$	$h(x) = -2x^2 - 2$	$m(x) = -2x^2 + 8$

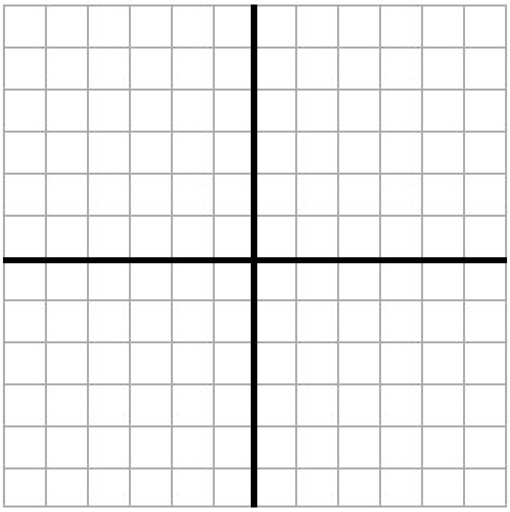
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.



9. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 2)^2$	$h(x) = (x - 3)^2$	$m(x) = (x + 4)^2$

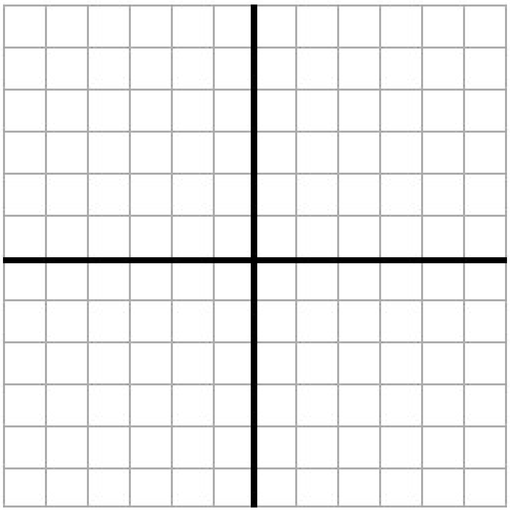
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?.



10. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = -2x^2$	$g(x) = -2\,(x + 2)^2$	$h(x) = -2\,(x - 3)^2$	$m(x) = -2\,(x + 4)^2$

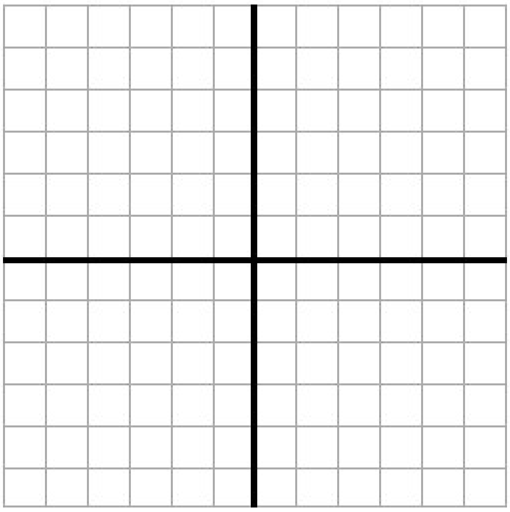
¿En qué se parecen y se diferencian las funciones.



11. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones siguientes:

$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 2)^2 + 1$	$h(x) = (x - 3)^2 - 4$	$m(x) = (x + 4)^2 + 2$

¿En qué se parecen y se diferencian las funciones?



UNIDAD DIDÁCTICA 14: ESTADÍSTICA

FICHA 1: Variables cualitativas y cuantitativas.

Tipos de variables estadísticas:

Tipos	Propiedades	Ejemplos
Cualitativas	**Los valores que toma la variable son cualidades, no números.**	• **Deporte: fútbol, balonmano, atletismo,...** • **Sexo: hombre, mujer.**
Cuantitativas	**Los valores que toma la variable son números.**	• **Número de páginas de un libro.** • **Edad**

A su vez, las variables cuantitativas se clasifican en:

Tipos	Propiedades	Ejemplos
Discretas	**En cada tramo, la variable sólo puede tomar un número determinado de valores.**	• **Número de páginas de un libro: 210 o 211 pero no 210,5.** • **Número que se ocupa en una fila: 1, 2, 3...**
Continuas	**En cada tramo, la variable puede tomar infinitos valores**	• **Altura de una persona: entre 170 cm y 180 cm la altura puede ser 171 cm, 171,5 cm...** • **Peso de un recién nacido**

1. Clasifica las siguientes variables estadísticas, escribiendo una X en el recuadro correspondiente:

	CUALITATIVA	DISCRETA	CONTINUA
Nº DE HIJOS VARONES			
TIPO DE MÚSICA PREFERIDA			
Nº DE HIJOS			
PESO DE RECIÉN NACIDOS			
Nº DE PÁGINAS DE UN LIBRO			
ESTATURA			

2. Clasifica las siguientes variables estadísticas seleccionando la opción que consideres correcta:

	CUANTITATIVA		CUALITATIVA
	DISCRETA	CONTINUA	
MARCA DE UN TELÉFONO			
COLOR DE OJOS			
ALTURA			
EDAD			
PESO			
DEPORTE FAVORITO			
RAZA DE PERROS			
Nº DE HIJOS			
LONGITUD DEL PIE			
ASIGNATURAS PENDIENTES			
PERÍMETRO CRANEAL			
CANTANTE FAVORITO			
PROGRAMA DE TELEVISIÓN PREFERIDO			
ESTATURA			
FRUTA PREFERIDA			
NÚMERO DE CALZADO			
MODELO DE COCHE PREFERIDO			
NOTA DE MATEMÁTICAS			
MARCA DE RELOJ			
NÚMERO DE HERMANOS			
SABOR DE HELADO PREFERIDO			
AÑO DE NACIMIENTO			

UNIDAD 14: ESTADÍSTICA

FICHA 2: Tabla de frecuencias absolutas y relativas

Una Tabla de frecuencia se construye de la siguiente forma:

FILAS: Se colocan los valores de las variables ordenadas de mayor a menor si son variables cuantitativas.

1. **Columna Frecuencia absoluta: Número de veces que se repite un valor "fi". La suma de todas las frecuentas absolutas nos da el total de datos (N).**
2. **Columna Frecuencia absoluta acumulada: En esta columna se va almacenando el valor acumulado de las filas de la frecuencia absoluta. Se representa por "Fi". El valor de la última fila para la frecuencia absoluta es el total de datos (N)**
3. **Columna Frecuencia relativa: Resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de datos. La suma de todas las frecuencias relativas es 1.**
4. **Columna de Frecuencia relativa acumulada: En esta columna se va almacenado el valor acumulado de las filas de la frecuencia relativa. Se representa por "Hi". El valor de la última fila para la frecuencia relativa es 1.**

1. En una clase de 25 alumnos hemos preguntado la edad de cada uno, obteniendo estos resultados:

14, 14, 15, 13, 15, 14, 14, 14, 14, 15, 13, 14, 15, 16, 14, 15, 13, 14, 15, 13, 14, 14, 14, 15, 14

Haz una tabla donde aparezcan las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas:

EDAD	F. ABSOLUTA (fi)	F.A. ACUMULADA (Fi)	F. RELATIVA (hi)	F.R. ACUMULADA (Hi)
13				
14				
15				
16				
	N =	**SUMA =**		

2. Se ha hecho una encuesta sobre el número de hijos en 50 familias, con los siguientes resultados:

0	2	1	2	5	2	1	1	1	4
0	0	2	0	4	4	1	1	2	2
3	1	2	3	0	3	1	3	2	2
3	3	1	5	4	3	3	1	2	2
2	3	3	4	0	2	2	1	4	1

Haz una tabla donde se recojan estos datos con sus frecuencias absolutas acumuladas y relativas acumuladas.

EDAD	F. ABSOLUTA (fi)	F.A. ACUMULADA (Fi)	F. RELATIVA (hi)	F.R. ACUMULADA (Hi)
0				
1				
2				
3				
4				
5				
	N =	**SUMA =**		

3. Se ha lanzado 50 veces un dado y se han obtenido las siguientes puntuaciones:

1	**3**	**4**	**2**	**1**	**3**	**4**	**5**	**6**	**3**
4	**3**	**5**	**4**	**6**	**4**	**3**	**2**	**5**	**4**
6	**3**	**2**	**4**	**1**	**2**	**2**	**4**	**5**	**5**
6	**3**	**5**	**2**	**5**	**4**	**3**	**3**	**5**	**6**
6	**5**	**2**	**5**	**6**	**3**	**2**	**1**	**4**	**2**

Elabora una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.

PUNTUACIÓN	**F. ABSOLUTA (fi)**	**F. RELATIVA (hi)**	**F. PORCENTUAL**
1		$\frac{4}{50}$05 = 0'08	0,08 x 100 = 0'08 %
2			
3			
4			
5			
6			
TOTAL	**50**	**1**	**100 %**

4. Se ha preguntado a los 60 estudiantes de 2.º de ESO el número de hermanos que tiene cada uno, los resultados se recogen a continuación:

0	**1**	**2**	**0**	**1**	**4**	**2**	**0**	**1**	**3**
1	**0**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**
5	**2**	**0**	**1**	**2**	**0**	**3**	**4**	**0**	**2**
1	**2**	**4**	**6**	**0**	**5**	**2**	**0**	**2**	**1**
2	**5**	**6**	**4**	**3**	**2**	**1**	**2**	**5**	**4**
0	**1**	**2**	**6**	**6**	**4**	**2**	**1**	**2**	**4**

Elabora una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.

Nº DE HERMANOS	**F. ABSOLUTA (fi)**	**F. RELATIVA (hi)**	**F. PORCENTUAL**
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
TOTAL	**60**	**1**	**100 %**

5. En una clase de un IES hemos medido la altura de los 25 alumnos. Sus medidas, en cm, son:

167	159	168	165	150
170	172	158	163	156
151	173	175	164	153
158	157	164	169	163
160	159	158	174	164

Elabora una tabla que represente estos resultados con sus frecuencias absolutas, relativas y porcentajes. Toma intervalos de amplitud 5 cm comenzando por 150.

MEDIDA (en cm)	F. ABSOLUTA (fi)	F. RELATIVA (hi)	F. PORCENTUAL
[150-155)			
[150-160)			
[160-165)			
[165-170)			
[170-175)			
TOTAL			

6. Al medir el diámetro de 20 naranjas, se han obtenido los siguientes resultados, en mm:

74	82	93	85	99
72	81	86	79	62
71	83	89	65	94
84	75	77	98	88

Con los datos anteriores, construye una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales, agrupándolos en cuatro intervalos de amplitud 10 mm, comenzando por 60.

DIÁMETRO (en mm)	F. ABSOLUTA (fi)	F. RELATIVA (hi)	F. PORCENTUAL
[60-70)			
[70-80)			
[80-90)			
[90-100)			
TOTAL	20	1	100 %

7. El profesor de Matemáticas ha pedido a los 30 estudiantes de una clase que midan su estatura. Los estudiantes le han proporcionado las siguientes medidas, en metros:

1,61	**1,62**	**1,51**	**1,63**	**1,61**	**1,54**
1,64	**1,71**	**1,64**	**1,56**	**1,63**	**1,63**
1,61	**1,53**	**1,64**	**1,57**	**1,67**	**1,73**
1,59	**1,61**	**1,59**	**1,62**	**1,61**	**1,58**
1,66	**1,66**	**1,69**	**1,59**	**1,63**	**1,64**

Con los datos anteriores, construye una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentuales, agrupándolos en cinco intervalos de amplitud 5 cm, comenzando por 1’50.

ESTATURAS	**F. ABSOLUTA (fi)**	**F. RELATIVA (hi)**	**F. PORCENTUAL**
[1’50 – 1’55)			
[1’55 – 1’60)			
[1’60 – 1’65)			
[1’65 – 1’70)			
[1’70 – 1’75)			
TOTAL	**30**	**1**	**100 %**

8. Se han pesado 40 piezas. Los resultados de las pesadas, expresados en gramos, son:

64’1	66’4	64	66’7	65’3	64’4	63’9	63
65’4	64’3	68’8	66’6	65’1	64’2	68’5	65’7
65’8	63’1	64’6	63’5	65	66’4	67’3	65’7
64	61’5	64’1	65	63	63’2	66’9	66’3
67	66’1	66’8	65’3	64’4	64’5	63’1	65’5

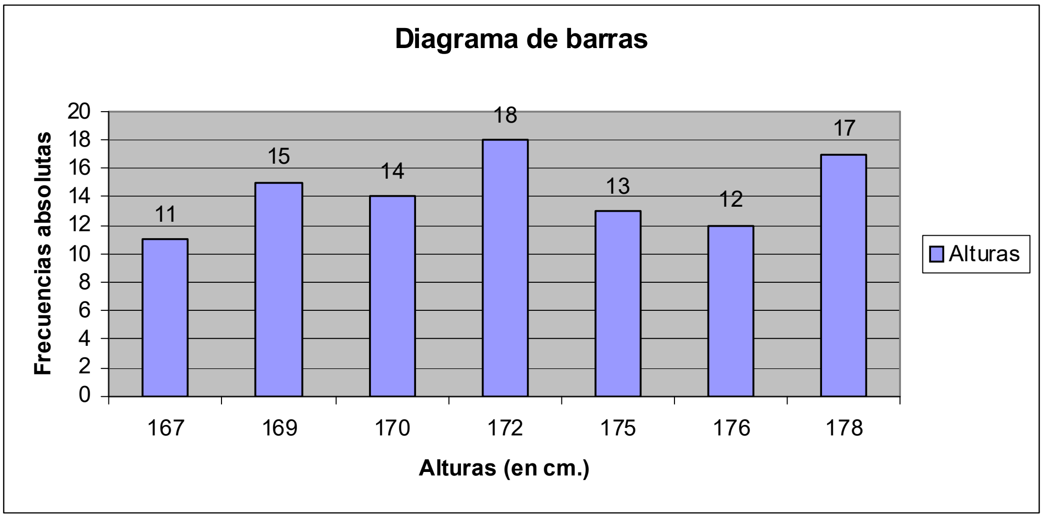
Confecciona una tabla estadística para presentar los resultados agrupando en intervalos los valores observados y donde aparezcan también las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas. Toma intervalos de amplitud de 1 cm comenzando por 61.

PESO	**F. ABSOLUTA (fi)**	**F.A. ACUMULADA (Fi)**	**F. RELATIVA (hi)**	**F.R. ACUMULADA (Hi)**
[61-62)				
[62-63)				
[63-64)				
[64-65)				
[65-66)				
[66-67)				
[67-68)				
[68-69)				

UNIDAD 14: ESTADÍSTICA.

FICHA 3: Elaboración de diagramas de barras.

1. Mirando el diagrama de barras que representa la altura de 100 personas, completa la tabla de frecuencias:



Completa la tabla:

ALTURA (cm)	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
167	11	$\frac{11}{100} = 0'11$
169		
170		
172		
175		
176		
178		
Total		

2. En la siguiente tabla se recoge el número de veces que un grupo de usuarios de un ambulatorio han tenido que acudir a su médico en el último año

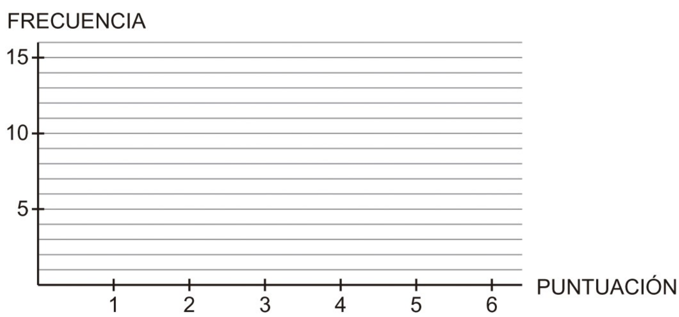
NÚMERO DE VISITAS AL MÉDICO	NÚMERO DE PERSONAS
1	10
3	25
5	43
7	31
10	12
12	4

a. ¿Cuántas personas han ido el médico 7 veces en el último año? ¿Cuántas han ido 4 veces?

b. Dibujar un diagrama de barras.

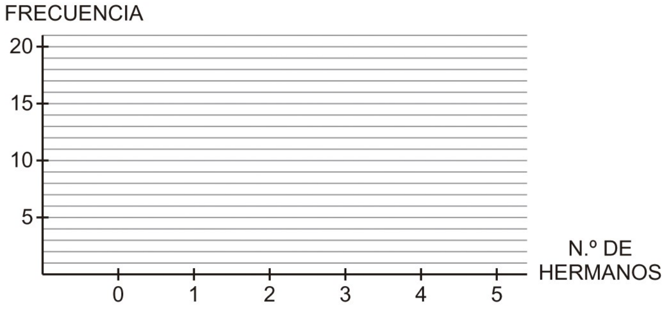
3. La tabla recoge el número de veces que ha salido cada una de las puntuaciones de un dado en 50 lanzamientos. Representa los resultados mediante un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias:

PUNTUACIÓN	N.° DE VECES
1	13
2	8
3	6
4	10
5	7
6	6

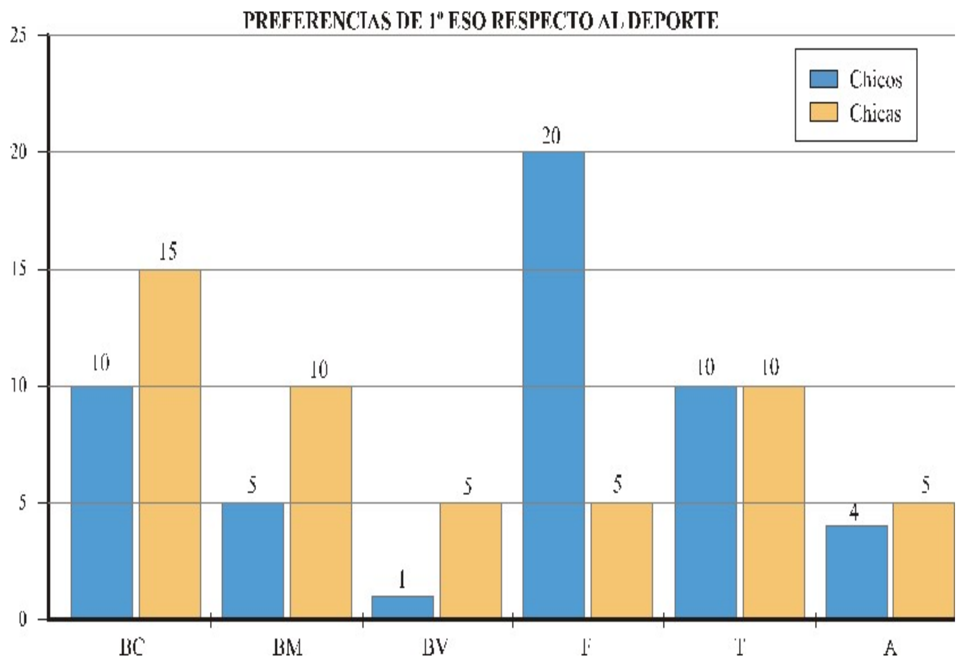


4. Se ha preguntado a 50 alumnos de 1° de ESO por el número de hermanos. La información obtenida se ha recogido en la siguiente tabla. Representa los datos en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias:

Nº DE HERMANOS	FRECUENCIA
0	15
1	20
2	6
3	3
4	4
5	2
Más de 5	0



5. El gráfico representa las preferencias de 50 chicos y 50 chicas de 1° de ESO respecto a su deporte favorito (BC = Baloncesto, BM = Balonmano, BV = Balonvolea, F = Fútbol, T = Tenis, A = Ajedrez). Observa el gráfico y responde:



a. ¿Qué deporte prefieren más chicos? ¿Y más chicas?

b. ¿Qué deporte es el menos elegido por los chicos?

c. ¿Cuántos chicos han seleccionado el ajedrez?

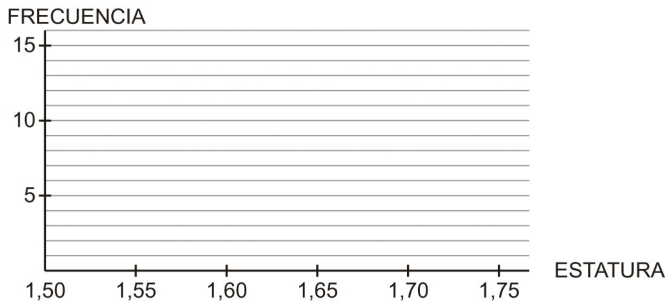
d. ¿Qué deporte es el más elegido en general?

UNIDAD DIDÁCTICA 14: ESTADÍSTICA

FICHA 4: Elaboración de histogramas

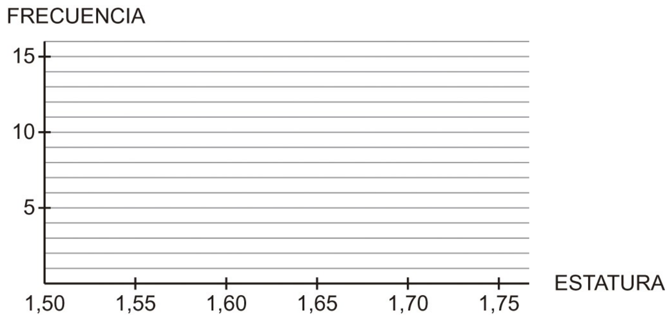
1. La distribución de las estaturas de los 30 alumnos de una clase es la que ves en la tabla. Representa los datos en un histograma y en un polígono de frecuencias:

ESTATURA	N.° DE ALUMNOS
Entre 1,50 y 1,55 m	6
Entre 1,55 y 1,60 m	4
Entre 1,60 y 1,65 m	2
Entre 1,65 y 1,70 m	3
Entre 1,70 y 1,75 m	15



2. La distribución de las estaturas de los 30 alumnos de una clase es la que ves en la tabla. Representa los datos en un histograma y en un polígono de frecuencias:

ESTATURA	NÚMERO ALUMNOS
Entre 1,50 y 1,55 m	3
Entre 1,55 y 1,60 m	6
Entre 1,60 y 1,65 m	15
Entre 1,65 y 1,70 m	4
Entre 1,70 y 1,75 m	2

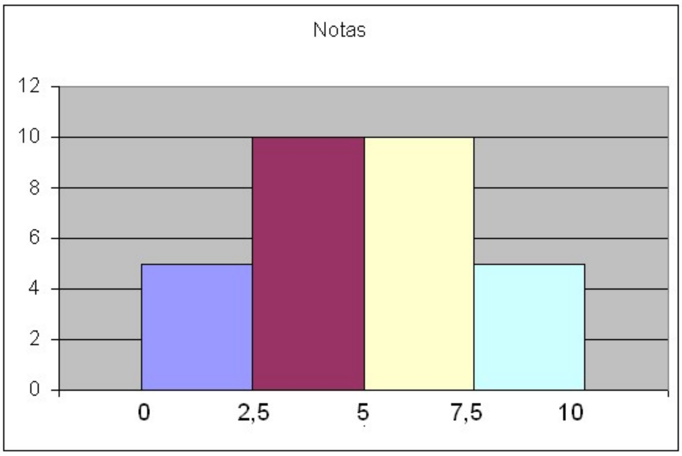


3. Dado el siguiente histograma relativo a las notas de los alumnos de una clase, responde:

   a. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?

   b. ¿Cuántos alumnos han aprobado?

   c. ¿Cuál es el porcentaje de suspensos?



UNIDAD DIDÁCTICA 14: ESTADÍSTICA

FICHA 5: Elaboración de diagramas de sectores

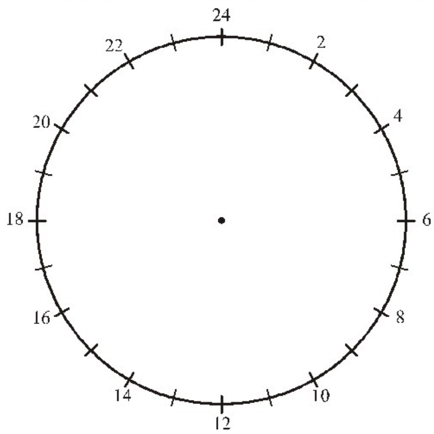
1. Haz un diagrama de sectores que represente la procedencia de los extranjeros residentes en España, en diciembre de 1999, recogidos en la siguiente tabla:

PROCEDENCIA	
EUROPA	353.000
AMÉRICA	167.000
ASIA	66.000
ÁFRICA	14.000

2. La tabla recoge el reparto del tiempo de Beatriz entre sus distintas actividades durante las 24 horas del día. Representa los datos en el gráfico de sectores:

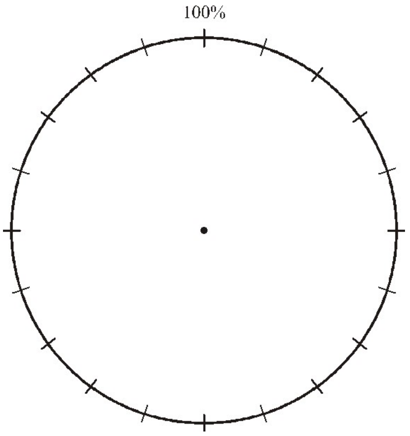
ACTIVIDAD	HORAS
Ocio	**3**
Estudiar	**3**
Colegio	**6**
Comer	**2**
Dormir	**10**

DISTRIBUCIÓN HORARIA DE ACTIVIDADES



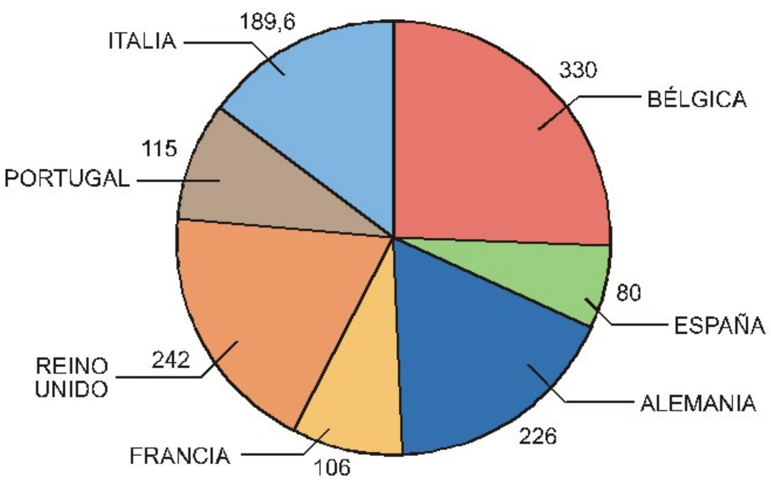
3. La tabla recoge la distribución, en forma de porcentajes, de las notas obtenidas por una clase de 1.° de ESO en el último examen de Matemáticas. Representa los datos en el gráfico de sectores:

CALIFICACIÓN	%
Insuficiente	**10**
Suficiente	**40**
Bien	**20**
Notable	**20**
Sobresaliente	**10**



4. Observa el gráfico y responde:

DENSIDAD DE POBLACIÓN DE ALGUNOS PAÍSES EUROPEOS (hab/km^2)



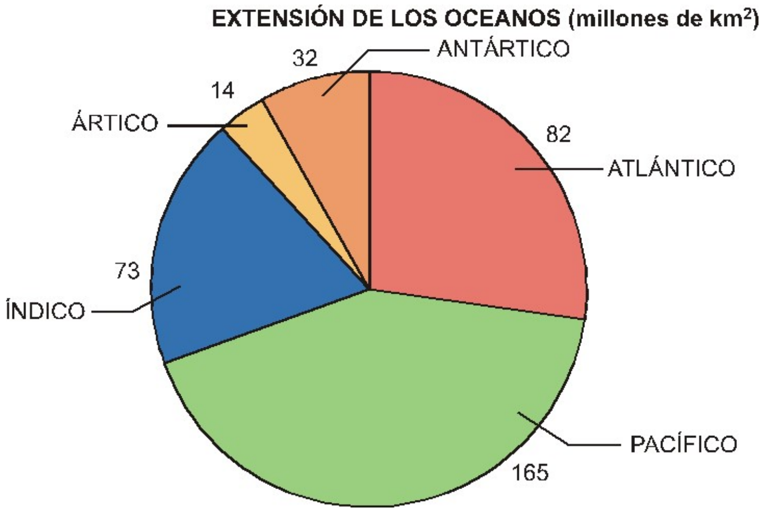
a) ¿Qué representa el gráfico?

b) ¿Cuál es el país más densamente poblado?

c) ¿Qué densidad de población le corresponde a España?

d) ¿Qué país está más densamente poblado, Alemania o Portugal?

5. Observa el gráfico y responde:



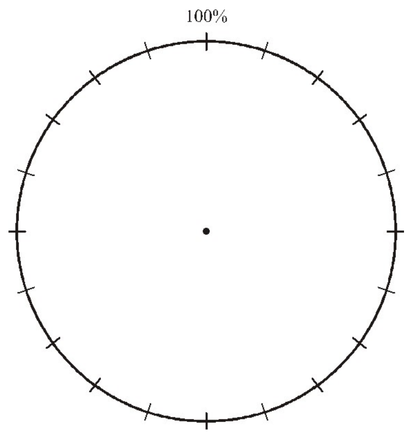
a. ¿Qué representa el gráfico?

b. ¿Qué océano es el más extenso?

c. ¿Y el menos extenso?

6. La tabla recoge, en euros, la distribución de los gastos de una familia a lo largo de un año. Representa los datos en el gráfico de sectores:

CONCEPTO	EUROS	%	GRADOS º
TRANSPORTE	1000		
ENERGÍA	1500		
ROPA	1000		
COMIDA	2000		
VIVIENDA	3000		
EDUCACIÓN	1000		
OTROS	500		



UNIDAD DIDÁCTICA 14: ESTADÍSTICA

FICHA 6: Parámetros de centralización: Media, mediana y moda.

La media: Solo se puede calcular para variables cuantitativas. Se calcula sumando todos los valores que obtenemos multiplicando cada valor de la variable estadística por su frecuencia absoluta, y dividiendo este resultado por el número total de datos.

La mediana: Solo se puede calcular para variables cuantitativas. Para calcularlo hay que ordenar todos los datos de mayor a menor y tomar el valor que ocupa la posición central si el total de valores es impar y, la media de los dos valores centrales, si el total de valores es par.

La moda: Se puede calcular para todo tipo de variables. Es el dato que tiene mayor frecuencia absoluta. En una muestra bimodal, habrá dos valores que compartan la misma frecuencia absoluta máxima y tendremos una muestra multimodal cuando tengamos mas de dos valores con frecuencia absoluta máxima.

Ejemplo: Halla la media, la mediana y la moda de los siguientes datos: 1, 3, 1, 1, 2, 3.

Primero ordenamos los datos: 1, 1, 1, 2, 3, 3 (6 datos)

Media = $\frac{1+1+1+2+3+3}{6}=\frac{11}{6}=1'8\widehat{3}$

Moda = 1 (3 veces)

Mediana = $\frac{1+2}{2}=1'5$ **(nº par de datos)**

1. Halla la media, la mediana y la moda de los siguientes datos

a. 5, 6, 8, 7, 7	**b.** 10, 12, 13, 14, 15, 19, 21
c. 12, 16, 5, 8, 6, 4, 12	**d.** 7, 12, 11, 8, 11, 13, 8, 8, 7

2. La siguiente tabla refleja las calificaciones de 30 alumnos en un examen de Matemáticas:

NOTA	2	4	5	6	7	8	9	10
Nº ALUMNOS	2	5	8	7	2	3	2	1

a. ¿Cuántos alumnos aprobaron?

b. ¿Cuántos alumnos sacaron como máximo un 7?

c. ¿Cuántos sacaron como mínimo un 6?

d. Calcular la nota media, la moda y la mediana

3. La siguiente tabla muestra el número de pruebas que suspendieron los alumnos y alumnas de 1º C en la pasada evaluación. Halla la media, la mediana y la moda.

N.º DE PRUEBAS SUSPENDIDAS	0	1	2	3	4
N.º DE ALUMNOS	5	6	4	2	2

4. Se ha preguntado a 15 estudiantes de 1º de ESO por el número de hermanos que tienen. La información obtenida se ha recogido en la siguiente tabla. Calcula la media, la mediana y la moda de dichos datos.

Nº DE HERMANOS	**FRECUENCIAS**
0	5
1	6
2	3
3	1
Más de 3	0

5. Esta tabla recoge el número de veces que ha salido cada una de las puntuaciones de un dado en 20 lanzamientos.

a. ¿Cómo se llama la medida que indica la puntuación que más veces ha salido? ¿Cuál es esa puntuación?

b. Halla la media y la mediana.

PUNTUACIÓN	N.º DE VECES
1	5
2	3
3	2
4	6
5	2
6	2

6. Ocho amigos juegan al baloncesto y cada uno lanza cuatro tiros a canasta. La siguiente tabla muestra el número de aciertos. Halla la media, la mediana y la moda del número de aciertos.

Nº DE ACIERTOS	0	1	2	3	4
FRECUENCIAS	0	1	2	4	1

7. Hemos realizado una encuesta de las notas de los alumnos de los siguientes cursos:

1º ESO: 5, 5, 6, 3, 4, 2, 2, 4, 5, 7, 7, 5, 8, 8, 9, 6, 7, 8, 9, 9, 5, 6

2º ESO: 4, 4, 5, 6, 7, 8, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 7, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9

Contesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Qué curso tiene mejor nota media?

b. ¿Cuál es la moda de cada curso?

c. ¿Cuál es la mediana de cada curso?

d. ¿Qué valor nos permite saber que clase tiene mejores resultados?

UNIDAD DIDÁCTICA 14: ESTADÍSTICA

FICHA 7: Parámetros de dispersión. Recorrido y desviación media.

¿Cómo podemos calcular el rango o recorrido?

El rango o recorrido es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de un conjunto de datos.

RECORRIDO = VALOR MAYOR − VALOR MENOR

Cuando mayor sea el recorrido, más dispersos estarán los datos.

1. Cuatro amigos han sacando las siguientes notas:

AMIGO A:	3	6	5	7	4
AMIGO B:	8	9	1	4	3
AMIGO C:	10	2	2	1	10
AMIGO D:	4	7	6	4	4

Todos tienen una nota media de 5 (lo puedes comprobar), sin embargo, unas están más dispersas que otras. Calcula el recorrido de cada amigo:

RECORRIDO A:

RECORRIDO B:

RECORRIDO C:

RECORRIDO D:

2. Determine el rango de los siguientes conjuntos de números

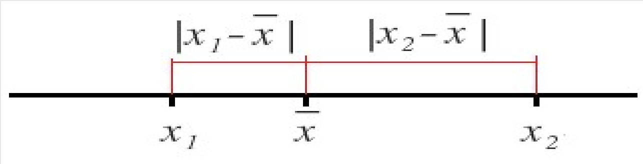
a. 3, 8, 10, 14, 9, 10, 12, 21, 5, 13, 11, 10

b. 232, 212, 151, 325, 142, 132, 142, 236, 145

c. 4, 5, 6, 4, 2, 8, 4, 6, 7, 5, 8, 4, 8, 8, 6, 7, 3, 4, 8, 4, 9, 7

¿Cómo podemos calcular la desviación media?

Cada dato se encuentra a una cierta distancia de la media:



Si sumamos todas las distancias de cada dato con respecto a la media, es decir, de todas las "desviaciones a la media" y la dividimos entre el número total de datos, estaremos calculando la desviación media

$$D.M.=\frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots|x_n-\bar{x}|}{N}$$

La fórmula anterior también podemos ponerla en forma de sumatorio (el signo Σ se utiliza para indicar la suma de varios sumandos):

$$D.M.=\frac{\sum|x_i-\bar{x}|}{N}$$

3. Esta tabla recoge el número de veces que ha salido cada una de las puntuaciones de un dado en 20 lanzamientos. Halla el recorrido y la desviación media de las puntuaciones.

PUNTUACIÓN	Nº DE VECES
1	5
2	3
3	2
4	6
5	2
6	2

4. Se ha preguntado a 15 alumnos de 1º de ESO por el número de hermanos que tienen. La información obtenida se ha recogido en esta tabla. Calcula el recorrido y la desviación media de dichos datos.

Nº DE HERMANOS	FRECUENCIAS
0	5
1	6
2	3
3	1

5. La tabla recoge las notas de Matemáticas de 20 estudiantes de 1º de ESO. Halla el recorrido y la desviación media de las notas.

NOTAS	3	4	5	6	7	8	9
Nº DE ALUMNOS	2	3	6	2	5	1	1

6. La siguiente tabla muestra el número de pruebas que suspendieron los alumnos y alumnas de 1º C en la pasada evaluación. Halla el recorrido y la desviación media del número de suspensos.

Nº DE PRUEBAS SUSPENSAS	0	1	2	3	4
Nº DE ALUMNOS	5	6	4	2	2

7. Ocho amigos juegan al baloncesto y cada uno lanza cuatro tiros a canasta. La siguiente tabla muestra el número de aciertos. Halla el recorrido y la desviación media del número de aciertos.

Nº DE ACIERTOS	0	1	2	3	4
FRECUENCIAS	0	1	2	4	1

UNIDAD DIDÁCTICA 14: ESTADÍSTICA

FICHA 8: Cuartiles y diagramas de caja y bigotes.

Los diagramas de Caja son una presentación visual que describe varias características importantes, al mismo tiempo, tales como la dispersión y simetría.

Para su realización se representan los tres cuartiles y los valores mínimo y máximo de los datos, sobre un rectángulo, alineado horizontal o verticalmente.

Los siguientes datos representan la edad de un colectivo de 20 personas.

36 25 37 24 39 20 36 45 31 31

39 24 29 23 41 40 33 24 34 40

ORDENAMOS LOS DATOS:

Para calcular los parámetros estadístico, lo primero es ordenar la distribución

20 23 24 24 24 25 29 31 31 33 34 36 36 37 39 39 40 40 41 45

CÁLCULO DE CUARTILES:

- **Q_1, el Primer Cuartil es el valor mayor que el 25% de los valores de la distribución.**

Como N = 20 resulta que N/4 = 5; el primer cuartil es la media aritmética de dicho valor y el siguiente: $Q_1 = (24 + 25) / 2 = 24'5$

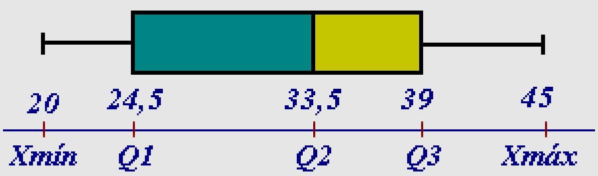
- **Q_2, el Segundo Cuartil es la mediana de la distribución, es el valor de la variable que ocupa el lugar central en un conjunto de datos ordenados.**

Como N/2 = 10 ; la mediana es la media aritmética de dicho valor y el siguiente:

$m_e = Q_2 = (33 + 34) / 2 = 33'5$

- **Q_3 , el Tercer Cuartil, es el valor que sobrepasa al 75% de los valores de la distribución. En nuestro caso, como 3N / 4 = 15, resulta $Q_2 = (39 + 39) / 2 = 39$**

DIBUJAR LA CAJA Y LOS BIGOTES:



El *bigote* de la izquierda representa al colectivo de edades ($X_{mín}$, Q_1)

La primera parte de la caja representa a (Q_1, Q_2)

La segunda parte de la caja representa a (Q_2, Q_3)

El *bigote* de la derecha viene dado por (Q_3, $X_{máx}$).

1. Se han anotado los pesos de un grupo de veinte estudiantes inscritos en un curso de dietética. Son los siguientes:

43	54	45	55	57	52	44	53	64	58
54	41	52	43	54	55	55	48	56	60

a. Calcula la mediana, Me, y los cuartiles Q1 y Q3 de la distribución.

b. Elabora un diagrama de caja y bigotes e interprétalo.

2. Calcula la mediana, Me, y los cuartiles, Q1 y Q3, de esta distribución:

10	14	3	18	15	5	22	17	8	15
12	17	7	20	13	8	5	14	9	10

Elabora un diagrama de caja y bigotes e interprétalo.

3. En una reunión de padres, el número de hijos es: 1, 3, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 5, 2, 4, 1, 1, 1.

a. Escribe la mediana, Me, y los cuartiles Q1 y Q3 de la distribución.

b. Elabora un diagrama de caja y bigotes e interprétalo.

4. Calcula la mediana, Me, y los cuartiles Q1 y Q3 de esta distribución

8	3	9	13	5	16	8	8	19
9	10	22	2	15	16	3	9	7

Elabora un diagrama de caja y bigotes e interprétalo.

5. Un alumno ha obtenido las siguientes notas a lo largo del curso en sus trabajos de Educación Plástica:

3, 5, 4, 3, 5, 8, 6, 6, 5, 7, 6, 5, 6, 6, 10, 8

a. Calcula la mediana, Me, y los cuartiles Q1 y Q3 de la distribución.

b. Elabora un diagrama de caja y bigotes e interprétalo.

6. Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución: 2, 1, 3, 5, 6, 5, 2, 10, 8, 3, 6, 3, 2, 10, 3, 10, 6. Representa los datos en un diagrama de caja.

UNIDAD DIDÁCTICA 14: ESTADÍSTICA

FICHA 9: Tablas de doble entrada.

En estadística, las tablas de contingencias se emplean para registrar y analizar la asociación entre dos o más variables, habitualmente de naturaleza cualitativa.

1. En una pecera tenemos 10 peces rojos y 10 grises. En una esquina ponemos un foco de calor que eleva la temperatura de esta zona. Los peces se distribuyen así:
   a. Completa la tabla en tu cuaderno.

	CALOR	FRÍO	TOTAL
ROJOS	9		10
GRISES	3		10
TOTAL			20

   b. ¿Cuántos peces rojos y cuántos grises permanecen en la parte fría?

   c. ¿Qué porcentaje de peces prefiere agua caliente?

   d. ¿Qué porcentaje de peces rojos prefiere el agua caliente?

   e. De entre los peces que prefieren el agua caliente, ¿qué porcentaje son rojos?

2. En un campamento con 100 chicos y chicas, se les da la opción de piragüismo o equitación: 29 chicos y la tercera parte de las chicas han elegido cayac y 34 chicas prefieren montar a caballo. Representa los datos en una tabla y halla la proporción de chicas que hay entre los que eligieron cayac.

	CAYAC	EQUITACIÓN	TOTAL
CHICAS		34	
CHICOS	29		
TOTAL			100

3. Esta tabla se refiere a los estudiantes de un curso durante el primer trimestre.

	ESTUDIA MENOS DE 2 HORAS DIARIAS	**ESTUDIA MÁS DE 2 HORAS DIARIAS**	**TOTAL**
SUSPENDE MÁS DE 2	**16**	**4**	
SUSPENDE 0, 1 Ó 2	**2**	**10**	
TOTAL			

Completa en tu cuaderno la tabla y responde:

a. ¿Cuántos estudiantes hay en total?

b. ¿Qué proporción de los estudiantes suspende más de dos asignaturas?

c. ¿Qué proporción de los que estudian más de dos horas diarias suspende más de dos asignaturas?

d. ¿Qué proporción de los que suspenden más de dos asignaturas estudian más de dos horas diarias?

e. Extrae alguna conclusión de los resultados.

4. En una clase con 36 estudiantes se realiza una encuesta con esta pregunta: ¿Qué prefieres, playa o montaña? Los resultados son:

	CHICAS	**CHICOS**	**TOTAL**
PLAYA	12	3	15
MONTAÑA	8	13	
TOTAL			36

Completa en tu cuaderno la tabla y responde:

a. ¿Qué significa el 3 de la primera fila? ¿Y el 8?

b. ¿Qué significa el 15 que hay en el total?

c. ¿Qué porcentaje de chicos prefiere montaña?

d. Averigua el porcentaje de chicas que prefieren playa.

UNIDAD 15: AZAR Y PROBABILIDAD.

FICHA 1: Sucesos aleatorios y sucesos deterministas. Espacio muestral.

Un experimento aleatorio es aquel que, repetido en las mismas circunstancias, puede ofrecer distintos resultados.

Ejemplos: Lanzar un dado al aire, sacar una carta de una baraja, lanzar una moneda, …

Llamaremos espacio muestral asociado a un experimento aleatorio al conjunto formado por todos los resultados posibles del experimento. Se designa por "E"

Ejemplo: Si el experimento aleatorio es "lanzar un dado", su espacio muestral es:

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Suceso aleatorio: Dado un espacio muestral, E, asociado a un determinado experimento aleatorio, llamaremos suceso a cualquier subconjunto de E.

Ejemplo: En el experimento "lanzar un dado", el suceso "salir par" sería P = { 2, 4, 6}

Suceso elemental: Es todo subconjunto de E formado por un solo elemento.

Suceso compuesto: Es cualquier suceso no elemental.

Suceso imposible: Es aquel suceso que no se verifica nunca. Se designa por Ø.

Suceso seguro: Es el que se verifica siempre. Se designa por E.

1. Escribe dos experimentos deterministas y dos experimentos aleatorios.

2. De los siguientes experimentos, ¿cuáles son aleatorios?

a. En una caja hay cinco bolas amarillas, sacamos una bola y anotamos su color.	
b. Lanzamos una moneda al aire y anotamos si sale cara o cruz.	
c. Al lanzar un dado de seis puntos anotamos todos los resultados menores que cuatro.	
d. Al lanzar un dado de seis puntos anotamos todos los resultados mayores que ocho.	

3. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y en caso afirmativo halla su espacio muestral:

a. Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo.

b. Pesar un litro de aceite.

c. Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.

d. Averiguar el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.

e. Sacar una bola de una bolsa con 4 bolas rojas.

f. Sacar una bola de una bolsa con 1 bola roja, 1 verde, 1 azul y 1 blanca.

g. Lanzar al aire una moneda y observar el tiempo que tarda en llegar al suelo.

4. En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Sacamos una bola y anotamos su número. Escribe el espacio muestral y los elementos de los siguientes sucesos:

a. "Obtener un número par".

b. "Obtener un número par y menor que 6".

c. "Obtener un número par o menor que 6".

5. Lanzamos un dado y anotamos la puntuación obtenida. Escribe el espacio muestral y los elementos de los siguientes sucesos:

a. "Obtener un número par".

b. "Obtener un número par y mayor que 4".

c. "Obtener un número impar o menor que 4"

6. Extraemos una carta de una baraja española y anotamos qué sale. Escribe el espacio muestral y los elementos de los siguientes sucesos:

a. "Obtener bastos".

b. "Obtener rey o as".

c. "Obtener as y copas".

7. Se lanza un dado cúbico y se anota la cara que queda arriba:

a. Escribe el espacio muestral.

b. Escribe dos sucesos elementales.

c. Escribe dos sucesos compuestos.

d. Escribe un suceso seguro.

e. Escribe un suceso imposible.

8. En una urna hay bolas numeradas del 1 al 7, se extrae una bola. Describe los siguientes sucesos:

a. Obtener un múltiplo de 4.

b. Obtener un número menor o igual a 3.

c. Obtener un divisor de 6.

UNIDAD 15: AZAR Y PROBABILIDAD

FICHA 2: Probabilidades mediante la regla de Laplace.

La Regla de Laplace define la probabilidad de un suceso como el cociente entre casos favorables y casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Ejemplos: Probabilidad de que al lanzar un dado salga el número 2.

El caso favorable es tan sólo uno (que salga el dos), mientras que los casos posibles son seis (puede salir cualquier número del uno al seis).

Por lo tanto: $P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{6} = 1'6666...$

1. Una urna contiene 12 bolas amarillas, 15 verdes y 23 azules. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar:

   a. Sea de color amarillo.

   b. Sea de color amarillo o verde.

   c. No sea de color amarillo.

2. En una clase del instituto hay 12 chicos morenos, 8 rubios, 4 castaños y 1 pelirrojo. El profesor saca a la pizarra a uno de ellos de forma aleatoria.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea rubio?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea rubio?

3. Si una caja contiene bolas numeradas desde 1 hasta 10, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una bola, ésta sea par?

4. En un campamento hay 32 alumnos europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar un alumno para que sea el portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

5. Se tiene una baraja de cartas española. Realizamos el experimento de sacar una carta. Calcula las siguientes probabilidades:

a. Sacar oros	**b.** Sacar un 5
c. Sacar una figura	**d.** Sacar bastos

6. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos asociados a extraer una carta de una baraja española:

a. Que sea un as	**b.** Que sea una espada.

c. Que sea un número mayor que 7.	**d.** Que sea la sota de copas

7. La urna de un sorteo contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100. Pedro lleva todas las papeletas de los números que terminan en 5 y Elena todas las papeletas de los números que son múltiplos de 13. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

8. Se lanzan dos monedas al aire. Determina la probabilidad de obtener:

- **a.** Exactamente dos caras.
- **b.** Al menos una cruz.

9. Se lanzan al aire dos dados de seis caras numeradas del 1 al 6 y se suman los puntos obtenidos.

- **a.** ¿Qué suma de puntuaciones tiene mayor probabilidad?
- **b.** La probabilidad de que la suma sea 3.
- **c.** La probabilidad de que la suma sea 7.
- **d.** La probabilidad de que la suma sea superior a 10.
- **e.** La probabilidad de que la suma sea 4 o 5.

10. Se tienen ocho cartas numeradas del 1 al 8. Realizamos el experimento aleatorio que consiste en sacar una carta. Calcula las siguientes probabilidades:

- **a.** Obtener número par
- **b.** Obtener múltiplo de 3
- **c.** Obtener número mayor que 4

11. Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Mediante la regla de Laplace, halla la probabilidad de obtener:

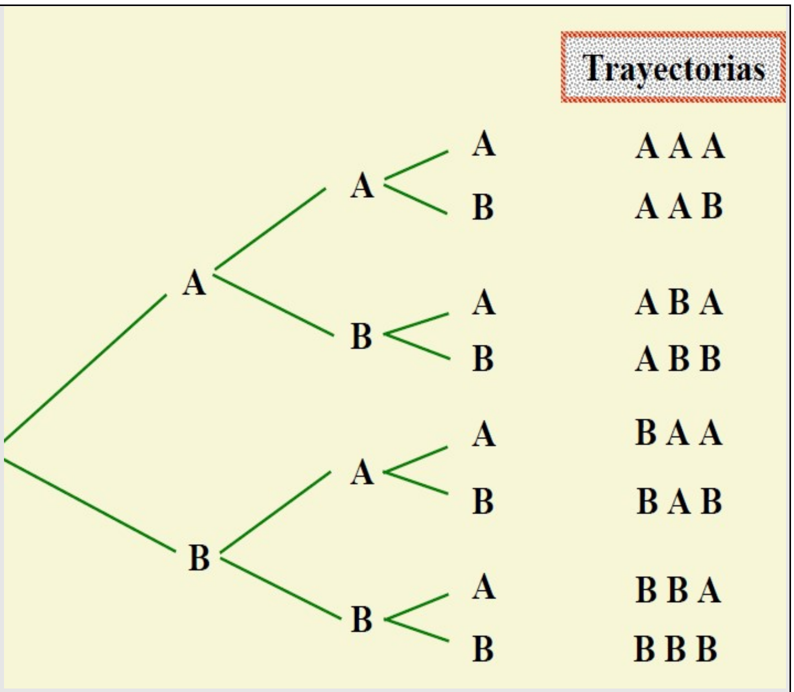
- **a.** Un rey
- **b.** Una carta que no sea de copas
- **c.** Oros
- **d.** Una figura de bastos
- **e.** Un 4 o un 6
- **f.** Una carta que no sea figura
- **g.** El rey de oros
- **h.** Una carta menor que 5

UNIDAD 15: AZAR Y PROBABILIDAD

FICHA 3: Probabilidades utilizando el diagrama de árbol.

El diagrama en árbol es un método para obtener los resultados posibles de un experimento cuando éste se produce en unas pocas etapas.

Cada paso del experimento se representa como una ramificación del árbol.



1. Lanzamos simultáneamente una moneda y un dado de seis caras numeradas del 1 al 6.
   - **a.** Haz un diagrama de árbol.
   - **b.** Escribe el espacio muestral.
   - **c.** Halla la probabilidad de sacar cara y número par.

2. En una bolsa hay tres bolas, una roja, una verde y una azul. En otra bola hay dos bolas, una blanca y una roja. Saco una bola de cada bolsa. Ayúdate de un diagrama de árbol para contestas a las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola verde y una blanca?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que solo una de las dos bolas sea roja?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas sea roja?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga la bola azul?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar cuatro veces una moneda salgan 2 caras (C) y 2 cruces (X)?.

A) 35% B) 40% C) 37,5% D) 50%

Construye un diagrama de árbol para justificar tu decisión

MONEDA 1 **MONEDA 2** **MONEDA 3** **MONEDA 4**

$$P(2C \text{ y } 2X) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = - =$$

4. Un matrimonio desea tener 3 hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor sea hombre (H) y el menor sea mujer (M)?. Construye un diagrama de árbol que te ayude a justificar la respuesta.

A) 0'30 B) 0'25 C) 0'35 D) 0'45

HIJO MAYOR **HIJO MEDIANO** **HIJO MENOR**

$$P(\text{Mayor}(H) \text{ y Menor}(M)) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = - =$$

5. En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase. Calcula la probabilidad de que:

a. Los dos sean chicos.

b. Sean dos chicas.

c. Sean un chico y una chica.

6. En una bolsa hay 4 bolas azules y 3 rojas. Se extraen dos bolas de esta bolsa. Realiza un diagrama de árbol que identifique el experimento. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.

UNIDAD 15: AZAR Y PROBABILIDAD

FICHA 4: Probabilidades utilizando tablas de contingencia

Las tablas de contingencia es una tabla de doble entrada que estudia relaciones entre dos variables cualitativas.

Las tablas de contingencia tienen dos objetivos fundamentales:

1) Organizar la información contenida en un experimento cuando está referida a dos variables cualitativas.

2) A partir de la tabla de contingencia se puede además analizar si existe alguna relación de dependencia o independencia entre los niveles de las variables cualitativas objeto de estudio.

Ejemplo: Los 1000 socios de un club deportivo se distribuyen de la forma que se indica en la tabla.

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
JUEGAN AL BALONCESTO	147	135	282
NO JUEGAN AL BALONCESTO	368	350	718
TOTAL	515	485	1000

Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea una mujer: $P(\text{Mujer}) = \frac{485}{1000} = 0'485$

b) Juegue al baloncesto: $P(\text{Juegue baloncesto}) = \frac{282}{1000} = 0'282$

c) Sea una mujer que practique baloncesto: $P(\text{Mujer que juega baloncesto}) = \frac{135}{1000} = 0'135$

1. A una reunión asisten 20 hombres y 40 mujeres. La mitad de los hombres y la cuarta parte de las mujeres tienen 40 años o más. Completa la tabla:

	< 40	40 o más	TOTAL
HOMBRE			
MUJER			
TOTAL			

Elegida una persona al azar calcula la probabilidad de que sea:

a. Hombre $\rightarrow$ P (“H”) =

b. Mayor de 40 años $\rightarrow$ P (“> 40”) =

c. Mujer menor de 40 años $\rightarrow$ P (“M” $\cap$ “< 40”) =

2. La siguiente tabla representa la participación en actividades extraescolares de los alumnos de un Instituto de Arévalo..

	Cultural	**Deportiva**	**Ninguna**	**Total**
1º	12	36	72	**120**
2º	15	40	45	**100**
3º	21	44	35	**100**
4º	24	40	16	**80**
Total	**72**	**160**	**168**	**400**

Explica el significado de las casillas sombreadas:

a. **72 =** Número de alumnos de 1º de ESO que no participan en ninguna actividad extraescolar.

b. 21 =

c. 40 =

d. 72 =

e. 160 =

f. 80 =

g. 400 =

3. Los docentes de un centro escolar se distribuyen del siguiente modo:

	HOMBRES	**MUJERES**	**TOTAL**
45 años o menos	14	6	
Más de 45 años	21	9	

TOTAL			

Elegimos al azar un profesor de ese centro escolar. Calcula la probabilidad de que:

a. Sea hombre

b. Sea mujer mayor de 45 años

c. Siendo hombre, tenga más de 45 años

4. En una empresa de 200 empleados se está analizando el tema de la puntualidad en el trabajo. La siguiente tabla refleja los resultados obtenidos. Completa la tabla.

	HOMBRES	**MUJERES**	**TOTAL**
PUNTUALES	55	86	
IMPUNTUALES	40	19	
TOTAL			

Se elige al azar a uno de los empleados. Calcula la probabilidad de que:

a. Sea hombre

b. Sea puntual

c. Sea hombre puntual

5. La siguiente tabla refleja el gusto o no por la lectura de un grupo de estudiantes de 2º de ESO. Completa la tabla:

	CHICOS	**CHICAS**	**TOTAL**
GUSTA LEER	58	36	
NO GUSTA LEER	28	28	
TOTAL			

Escogemos al azar a uno de esos estudiantes. Calcula la probabilidad de que:

a. Sea chica

b. No le guste la lectura

c. Sea chica que le guste leer

6. He preguntado a los compañeros y compañeras de mi clase por sus mascotas, con sus respuestas he construido la siguiente tabla:

	CHICOS	**CHICAS**	**TOTAL**
PERRO	8	5	
GATO	2	1	
NO MASCOTA	6	8	
TOTAL			

Elegimos al azar un estudiante de mi clase. Calcula la probabilidad de que:

a. Sea chica

b. No tenga mascota

c. Siendo chico, tenga gato

7. Sabemos que en un grupo de 2º ESO hay 17 chicas (M) y 13 chicos (H) siendo 3 chicas y 4 chicos zurdos (Z). Completa la tabla:

	ZURDOS (Z)	**DIESTROS (D)**	**TOTAL**
CHICOS (H)			
CHICAS (M)			
TOTAL			

Elegimos al azar un estudiante de mi clase. Calcula la probabilidad de que:

a. Sea zurdo

b. No sea un chico diestro

c. Siendo chico, sea zurdo