

**ELABORACIÓN  
DE  
MATERIALES  
PARA  
CONOCIMIENTO  
DE  
MATEMÁTICAS  
3º ESO**

Documento elaborado por:

- Mercedes Rodríguez Prado
- José Daniel Benito Martín
- José Carlos Ciudad Gómez
- Julio Rodríguez Villa



**ÍNDICE:**

UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES. ....	5
FICHA 1: Operaciones combinadas de números naturales. ....	5
FICHA 2: Números primos y compuestos. Descomposición en factores. ....	7
FICHA 3: Cálculo de MCM y MCD. ....	8
FICHA 4: Problemas de divisibilidad. ....	10
FICHA 5: Operaciones combinadas de números enteros. ....	12
FICHA 6: Suma, resta, multiplicación y división de números decimales. ....	17
FICHA 7: Ordenación de números decimales. ....	22
FICHA 8: Problemas de números decimales. ....	23
UNIDAD DIDÁCTICA 2 : FRACCIONES. ....	25
FICHA 1: de relación entre fracciones y números decimales. Fracción generatriz. ....	25
FICHA 2: fracciones equivalentes: cálculo de fracciones equivalentes, simplificación de fracciones, ordenación de fracciones. ....	27
FICHA 3: Fracción como operador. ....	29
FICHA 4: Suma, resta, multiplicación y división de fracciones. ....	31
FICHA 5: Operaciones combinadas con fracciones. ....	34
FICHA 6: Castillos de fracciones. ....	36
FICHA 7: Problemas con fracciones. ....	38
UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES ....	42
FICHA 1: Definición y propiedades de las potencias. ....	42
FICHA 2: Operaciones con potencias. ....	44
FICHA 3: Expresión en notación científica. ....	46
FICHA 4: Operaciones en notación científica. ....	48
FICHA 5: Problemas de potencias y notación científica. ....	51
FICHA 6: Definición de radical. ....	53
FICHA 7: Propiedades de los radicales. ....	55
FICHA 8: Extracción de factores y operaciones con radicales. ....	58

UNIDAD DIDÁCTICA 4: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES.....	61
FICHA 1: Relación de proporcionalidad directa e inversa.....	61
FICHA 2: Proporcionalidad simple. ....	63
FICHA 3: Regla de tres compuesta. ....	67
FICHA 4: Cálculo de porcentajes. ....	71
FICHA 5: Aumentos y disminuciones porcentuales. ....	74
FICHA 6: Porcentajes sucesivos.....	78
FICHA 7: Interés simple. ....	82
FICHA 8: Interés compuesto. ....	84
UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS .....	86
FICHA 1: Definición de sucesión.....	86
FICHA 2: Término general de una sucesión. ....	88
FICHA 3: Progresiones aritméticas. Definición. ....	91
FICHA 4: Progresiones aritméticas. Cálculo del término general.....	94
FICHA 5: Progresiones aritméticas. Suma de n términos. ....	98
FICHA 6: Progresiones geométricas. Definición y término general.....	102
FICHA 7: Progresiones geométricas. Suma de n términos. ....	107
FICHA 8: Progresiones geométricas. Suma de todos los términos.....	111
UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA.....	115
FICHA 1: Monomios y polinomios. Grado y valor numérico.....	115
FICHA 2: Raíces de polinomios. Regla de Ruffini .....	117
FICHA 3: Descomposición en factores de un polinomio.....	119
FICHA 4: Suma y resta de polinomios. ....	120
FICHA 5: Multiplicación de polinomios. ....	123
FICHA 6: División de polinomios. ....	125
FICHA 7: Fracciones algebraicas. Simplificación. ....	127
FICHA 8: Fracciones algebraicas. Suma y resta.....	128

UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES .....	130
FICHA 1: Ecuaciones de primer grado sencillas y con paréntesis.....	130
FICHA 2: Ecuaciones de primer grado con denominadores. ....	136
FICHA 3: Problemas con edades. ....	140
FICHA 4: Problemas de mezclas.....	142
FICHA 5: Ecuaciones de segundo grado completas. ....	144
FICHA 6: Ecuaciones de segundo grado incompletas. ....	147
FICHA 7: Problemas con ecuaciones de segundo grado.....	149
FICHA 8: Ecuaciones bicuadradas. ....	152
UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES .....	154
FICHA 1: Representación gráfica de funciones.....	154
FICHA 2: Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales.....	156
FICHA 3: Interpretación geométrica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas .....	158
FICHA 4: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por sustitución.....	160
FICHA 5: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por igualación. ....	164
FICHA 6: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por Reducción.....	168
FICHA 7: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales no inmediatos.....	172
FICHA 8: Problemas variados. ....	175
FICHA 9: Problemas de figuras geométricas.....	178
FICHA 10: Problemas de mezclas y variados.....	180
FICHA 11: Problemas de edades.....	182

**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.****FICHA 1: Operaciones combinadas de números naturales.**

Para resolver operaciones combinadas (suma, resta, multiplicación y división) de números naturales, seguimos un orden establecido. Se llama jerarquía de operaciones:

- Primero se realizan las operaciones que están entre paréntesis.
- Después las multiplicaciones y divisiones.
- Por último, las sumas y restas.

Cuando las operaciones tienen el mismo rango, se realizan de izquierda a derecha.

1. Calcula el valor de las siguientes operaciones combinadas, recuerda el índice:

a)  $28 \cdot 4 : 2 - 16 : 8 \cdot 9 =$

b)  $17 - 3 \cdot 5 + 24 : 6 \cdot 8 =$

c)  $(32 - 18) : (2 \cdot 7) =$

d)  $45 : (5 + 4) + 2 \cdot (36 : 9 - 2) =$

e)  $15 \cdot (18 : 6) - 24 : 3 + 1 =$

f)  $25 + 60 : 3 - 6 \cdot (3 + 11) : 7 + 3 : (2 - 1) =$

g)  $5 \cdot (7 - 3 + 14 - 10) (5 + 3) : 2 =$

h)  $32 - 10 \cdot 3 + 16 : (10 - 2) =$

i)  $27 : (17 - 2 \cdot 4) - 1 =$

j)  $24 : (12 - 54 : 9) + 3 \cdot (15 - 12 : 3) + 5 - 4 : 2 =$

k)  $98 - 38 : 19 + 4 \cdot 6 : 3 - 2 \cdot (56 : 7 + 2) =$

l)  $10 - 5 \cdot (12 - 4 : 4 - 9) - 4 \cdot [-10 : (3 + 2)] =$

m)  $3 - [2 - (-1) \cdot (14 - 20 : 4 - 10) - 4 \cdot (-3)] - 6 \cdot (-2) =$

n)  $3 - [(-3) + 3 \cdot (-2 + 6) - 10] \cdot [-9 : (-4 - 2 \cdot 3 + 7) + 1] =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.****FICHA 2: Números primos y compuestos. Descomposición en factores.**

**Definición:** Un número primo es aquel que solamente tiene 2 divisores, él mismo y 1.

**Definición:** Un número compuesto es aquel que no es primo (tiene más de dos divisores)

**Descomposición en factores primos:** Todo número entero compuesto se puede descomponer como producto de sus factores primos diferentes entre sí, elevados a ciertos exponentes enteros positivos. Esta descomposición es única salvo el orden de los factores.

1. Rodea los números primos:

12      17      19      93      91      111      41      15

2. Calcula la descomposición factorial de los siguientes números:

a) 1500	b) 2000	c) 180	d) 3200
e) 1000	f) 1240	g) 924	h) 2100
i) 770	j) 2160	k) 4725	l) 26411

**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.****FICHA 3: Cálculo de MCM y MCD.**

**Definición:** El Máximo Común Divisor (MCD) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

**Cálculo del MCD:**

- Se descomponen todos los números en factores primos.
- Se toman los factores comunes con menor exponente.
- Se multiplican dichos factores.

**Definición:** El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de dichos números.

**Cálculo del MCM:**

- Se descomponen todos los números en factores primos.
- Se toman los factores comunes y no comunes con mayor exponente.

Se multiplican dichos factores.

1. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números.

M.C.D. (16, 40, 60) = M.C.M. (16, 40, 60) =	M.C.D. (14, 26, 55) = M.C.M. (14, 26, 55) =
M.C.D. (25, 50, 75) = M.C.M. (25, 50, 75) =	M.C.D. (20, 30, 40) = M.C.M. (20, 30, 40) =

M.C.D. (25, 35, 45) = M.C.M. (25, 35, 45) =	M.C.D. (70, 98, 14) = M.C.M. (70, 98, 14) =
M.C.D (126, 315, 140) = M.C.M (126, 315, 140) =	M.C.D (99, 25, 24) = M.C.M (99, 25, 24) =
M.C.D (50, 75, 100, 115) = M.C.M (50, 75, 100, 115) =	M.C.D (10, 12, 80, 120) = M.C.M (10, 12, 80, 120) =
M.C.D. (100, 200, 300) = M.C.M. (100, 200, 300) =	M.C.D. (33,77, 111) = M.C.M. (33,77, 111) =

**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.**

**FICHA 4: Problemas de divisibilidad**

1. Un frutero tiene 360 kg de manzanas y 455 kg de peras, y las quiere distribuir en bolsas de un número entero de kilos e igual masa y sin mezclar las frutas. ¿Con cuántos kilos, como máximo, puede llenar cada bolsa?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Dos barcos llegan a un puerto cada 14 días y cada 21 días respectivamente. Si coinciden el 1 de enero. ¿Cuántos días tardarán en volver a encontrarse por primera vez?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. En una tienda de mascotas tienen 20 gatos y 28 perros. Se quieren introducir en jaulas lo más grande posibles y que haya el mismo número de animales en cada una, sin mezclar los gatos con los perros. ¿Cuántos animales habrá en cada jaula?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. En la puerta de mi casa hay una parada del bus. Para autobuses de tres líneas. Los de la línea A pasan cada 4 minutos, los de la B cada 6 y los de la C cada 8. Han coincidido los tres a las 5 de la tarde. ¿A qué hora volverán a coincidir



**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.****FICHA 5: Operaciones combinadas de números enteros.****Prioridad de operaciones:**

- Corchetes: cuando hay varios, se opera de dentro hacia afuera.
- Paréntesis: si hay varios paréntesis, se opera de dentro hacia afuera (se hacen primero los más internos).
- Potencias y raíces.
- Multiplicaciones y divisiones.
- Sumas y restas.

1. Realiza las siguientes operaciones atendiendo a la jerarquía de operaciones:

a)  $2 - 3 \cdot 5 + 9 - 2 \cdot 4 =$

b)  $4 \cdot 2 - 3 \cdot (4 - 2 \cdot 3 + (5 - 3) \cdot (-2)) + 6 =$

c)  $-3 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) + 6 - (3 - 2 \cdot 4) =$

d)  $12 + 6 : 3 - 2 =$

e)  $(5 \cdot 2 + 3 \cdot 4) : 11 + 10 =$

f)  $12 + 27 : 3 - 3 + 11 =$

g)  $17 + 28 \div : 5 + 3 - 1) \cdot 3 - 7 =$

h)  $3 \cdot 2 - 15 : [9 - 4 \cdot (5 - 2) + 6] =$

i)  $93 \div 3 - 82 : 41 + 6 : 2 - 31 =$

j)  $(8 - 2 \cdot 2 + 30 + 15 : 3) : (10 : 2) =$

k)  $40 : 10 + 30 : 6 - 40 : 8 =$

l)  $(10 \cdot 2 - 8) : 4 - 5 =$

m)  $3 \cdot [8 + 1 - (14 - 8)] + (10 - 2) - (35 + 14) : 7 =$

n)  $[-6 + 3 \cdot (4 - 35 : 5)] - [5 - 3 \cdot (13 - 11)] =$

o)  $[3 + 5 \cdot (18 - 19)] - (-7) - [8 - 4 \cdot (21 : 3 - 4)] =$

p)  $[-3 + 2 \cdot (3 - 5 \cdot 2)] - 7 - [-4 \cdot (9 : (-3) - 4)] =$

q)  $32 - 2 \cdot (22 - 25 : 5) - (8 : (-2) - 10) \cdot (5 - 9) =$

$$r) [6 + 2 \cdot (3 - 25 : 5)] - [4 - 3 \cdot (8 - 6)] =$$

$$s) 2 - (+3)^3 - (-4)^3 + (-5)^2 : (-5) + 2^2 =$$

$$t) 3^2 \cdot [(-2)^2 - (11 - 13)^3] + (-9) : (-3)^1 =$$

$$u) (-2)^3 \cdot [(-3)^2 : (7 - 8)^3] + (-5) - (-9) : (-3)^1 =$$

$$v) (-3)^2 \cdot (2 - 3)^2 - 6 \cdot [-3^2 + (6 - 8) \cdot 4] =$$

$$w) [(-3)^1 + 5 \cdot (6 - 9)^0] + 7 - [8 - 4 \cdot (12 : (-3) + 4)] =$$

$$x) 2^2 \cdot [(-3)^2 - (6 - 8)^3] + (-4) : (-2)^1 =$$

$$y) -5 + 4 \cdot (-2 + 1)^3 - 6 \cdot (5 - 6)^4 - (-4) \cdot (12 - 9)^2 =$$

$$z) (3 - 4)^4 - (-2)^3 + 18 : (-1 - 8) - (-4 + 2)^2 =$$

$$aa) 12 - 8 \cdot [-2 - 3 + (-2)^2 - 3^2] - (5 - 6)^5 - \sqrt{9} \cdot (8 - 9) =$$

$$bb) 12 : (-6) + (-8 - 7) \cdot (-3 - 2 + 6) - (-3) \cdot (-4) =$$

$$cc) (-40) : (-2)^3 + \sqrt{36} \cdot (6 - 2 \cdot 5) + (-15) : (-3) =$$

$$dd) (-5)^3 : [1 + (-2)^3 \cdot (-3)] - 4 \cdot (-10)^2 =$$

$$ee) 3 \cdot [5 - 3 \cdot (6 - 2 \cdot 5 + 24 : 2) + (-3)^3] - (-3 - 1)^1 =$$

$$ff) (-3) \cdot (-5)^2 - [4 + 2^5 - 3^2 \cdot (-2)^2] - (-1)^{10} =$$

$$\text{gg) } (-3)^2 \cdot [4 - (-6 + 8 \cdot (-5))] - 4 \cdot (-1 - 3)^0 =$$

$$\text{hh) } 5 - 3 \cdot (12 - 7)^2 - [24 : (2 - \sqrt{36})] =$$

$$\text{ii) } -12 : (-7 + 3) - (-9 - 3) : (-3) + (-20) : (6 - 7)^1 =$$

$$\text{jj) } [\sqrt{144} - (-2)^2 + (-5)^1]^2 : [(-7)^2 - (-1) - (+41)] =$$

$$\text{kk) } (5-8)^3 \cdot (-2)^2 + (-4 - 2) : (-3)^1 - [45 - (-8)] \cdot (-3 + 2)^7 =$$

$$\text{ll) } \sqrt{25} - [34 + 55 : (-13 + 2)] - (13 - 9 \cdot 2) \cdot (-2 + 1)^3 =$$

$$\text{mm) } (-8 + 6)^4 \cdot [(-9 + 4 + 13) : (-5 + 3 \cdot 2) - (-2)^3] - (-9 + 6 \cdot 3) \cdot (-6 + 8) =$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.****FICHA 6: Suma, resta, multiplicación y división de números decimales.****Suma y resta de números decimales:**

La suma y resta con números decimales es exactamente igual que con números enteros. Lo único que hay que hacer es vigilar que cada tipo de cifra vaya en la columna correcta; las centenas en la columna de las centenas, las decenas en la columna de las decenas, las unidades en la columna de las unidades, las décimas en la columna de las décimas...

Una buena forma de no equivocarse es colocar siempre las “comas” una debajo de la otra.

1. Realiza las siguientes SUMAS de números decimales:

$8776,4 + 6494,8028 =$

$132,8 + 6056,5 =$

$6585,029 + 1321 =$

$513,91 + 9668,4066 =$

$7699,441 + 3809,8921 =$

$4729,87 + 2356,7 =$

$8169,788 + 1718,405 =$

$5374,3 + 9349,68 =$

$3774,58 + 7347,06 =$

$5121,9 + 526,079 =$

$2744,282 + 7762,5 =$

$1807,1344 + 2398,685 =$

IES Adaja de Arévalo

Dpto. de Matemáticas

$6643,32 + 1274,5 =$

$9520,448 + 7422,929 =$

$2510,8914 + 3881,94 =$

$2239,46 + 6117,9 =$

$4316,59 + 984,6 =$

$1370,5 + 4300,213 =$

2. Realiza las siguientes RESTAS de números decimales:

$803,42 - 946,9 =$

$821 - 295,7 =$

$566,9 - 150,2 =$

$810,6 - 975,08 =$

$263,46 - 93,2 =$

$977,52 - 362,57 =$

$98,3 - 758,35 =$

$982,11 - 100,65 =$

$577,959 - 679,634 =$

$444,65 - 769,8 =$

$56,823 - 304,6 =$

$347,451 - 219,55 =$

$247,05 - 333,94 =$

$901,15 - 691,3 =$

$598,763 - 360,92 =$

**Multiplicación de números decimales:**

Para multiplicar números decimales, se multiplican como si fueran números naturales y, en el proceso, se separan con una coma, hacia la izquierda, tantas cifras decimales como tengan en total los dos factores.

$$\begin{array}{r}
 73,24 \\
 \times 5,1 \\
 \hline
 7324 \\
 + 36620 \\
 \hline
 373,524
 \end{array}$$

2 decimales  
+ 1 decimal  
Colocamos la coma para que haya 3 decimales

3. Realiza las siguientes MULTIPLICACIONES de números decimales:

$274,1 \times 6 =$

$27,23 \times 54,17 =$

$468,47 \times 1,2 =$

$77,73 \times 24,5 =$

$352,1 \times 18,8 =$

$429,83 \times 80,7 =$

$966,5 \times 24,8 =$

$861,2 \times 79,98 =$

**División de números decimales:** Distinguiremos dos casos

A) Si el divisor es un número natural: se divide con normalidad y al bajar la primera cifra decimal añadimos una coma en el cociente.

B) Si el divisor es un número decimal: multiplicamos el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor para conseguir así que, el divisor, sea un número natural.

**Ejemplo:** Dividamos  $275,8$  entre  $3,62$

$$275,8 \times 100 = 27580$$

$$3,62 \times 100 = 362$$

**De esta forma, hemos transformado la división  $275,8 : 3,62$  en  $27580 : 362$**

4. Realiza las siguientes divisiones con números decimales:

$199,818 : 0,45 =$	$56,8 : 0,25 =$
$490 : 0,2 =$	$534,216 : 0,75 =$
$568 : 3,25 =$	$182,88 : 15,24 =$
$410,48 : 5,4 =$	$120,32 : 2,56 =$

**Multiplicación por la unidad seguida de ceros (10, 100, 1000, ...)**

Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

5. Realiza las siguientes multiplicaciones:

$0,6 \times 10 =$	$100 \times 6,611$	$0,5 \times 1000 =$
$100 \times 1,7 =$	$1000 \times 8,89 =$	$7,2 \times 10 =$
$8,51 \times 10 =$	$10 \times 9,019 =$	$4,62 \times 100 =$
$100 \times 3,22 =$	$1000 \times 5,6 =$	$4,87 \times 100 =$
$5,23 \times 100 =$	$2,864 \times 100 =$	$1000 \times 2,3 =$
$0,64 \times 1000 =$	$1000 \times 8,035 =$	$5,3 \times 100 =$
$8,4 \times 10 =$	$100 \times 5,04 =$	$0,00001 \times 100 =$

**Divisiones entre la unidad seguida de ceros (10, 100, 1000, ...)**

Para dividir un número por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

6. Realiza las siguientes divisiones:

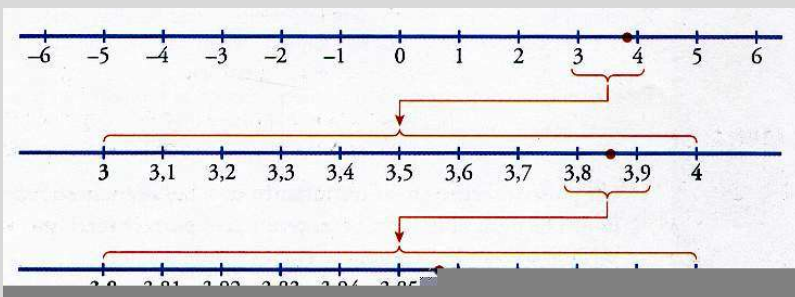
$1 \div 100 =$	$3,7 \div 100 =$	$9,9 \div 10 =$
$9,5 \div 10 =$	$3,1 \div 100 =$	$9,7 \div 1000 =$
$9,8 \div 1000 =$	$8,8 \div 1000 =$	$0,5 \div 1000 =$
$9,7 \div 10 =$	$2,2 \div 1000 =$	$4,1 \div 1000 =$
$0,9 \div 100 =$	$5,3 \div 100 =$	$4 \div 100 =$
$6,3 \div 100 =$	$7,9 \div 100 =$	$4,5 \div 10 =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.**

**FICHA 7: Ordenación de números decimales.**

**Debemos tener en cuenta una propiedad muy importante de los números decimales:**

**Siempre, entre dos números decimales, hay infinitos números decimales.**



1. Escribe tres números entre cada casilla:

2'3 < < < < 2'4                      0'57 < < < < 0'58

6'1 < < < < 2'2                      1'25 < < < < 1'26

8'02 < < < < 8'03                      5'7 < < < < 5'71

2. Ordena de menor a mayor: 0'0099, 0'009, 0'0098, 0'01, 0'015

3. Ordena de menor a mayor: 21'09, 21'1, 21'7, 21'65, 21'06, 21'20, 21'649

4. Ordena de menor a mayor: -5'21, -5'09, 5'04, 5'51, -5'088, 5'409, 5'6

**UNIDAD DIDÁCTICA 1: NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y DECIMALES.**

**FICHA 8: Problemas de números decimales.**

1. El producto de un número por 0,8 es igual a 1,04. ¿Cuál es el número?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Con un bidón de 90 litros se han llenado 120 botellas. ¿Cuál es la capacidad de una botella?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. Calcula el perímetro de un cuadrado cuya superficie es igual a la de un rectángulo de base 1,1 m y altura 52 cm.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. El espesor de las monedas de 2 € es de 2,2 mm. Una serie de monedas de 2 € están colocadas ordenadamente, una sobre otra. El montón tiene un espesor de 11 cm. ¿Cuántas monedas tiene?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. Las monedas de 1 € tienen un diámetro igual a 23,25 mm. El diámetro de las monedas de 2 € es de 25,75 mm. ¿Cuál es la suma y la diferencia de los diámetros?

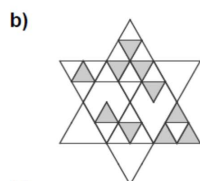
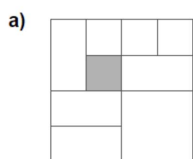


**UNIDAD DIDÁCTICA 2 : FRACCIONES.**

**FICHA 1: de relación entre fracciones y números decimales. Fracción generatriz.**

Números decimales:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Racionales (se pueden escribir como fracción)} \\ \text{Irracionales (no se pueden escribir como fracción)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{EXACTOS} \\ \text{PERIÓDICOS} \end{array}$

1. Indica la fracción de la parte coloreada:



2. Expresa en forma decimal las siguientes fracciones, indicando de qué tipo es el número obtenido:

$\frac{18}{7} =$	$\frac{13}{5} =$	$\frac{23}{10} =$	$\frac{21}{13} =$
$\frac{5}{7} =$	$\frac{35}{6} =$	$\frac{441}{6} =$	$\frac{23}{11} =$
$\frac{5}{3} =$	$\frac{51}{8} =$	$\frac{42}{5} =$	$\frac{33}{9} =$

**Tanto los números decimales exactos como los periódicos, son números racionales, esto es, se pueden expresar en forma de fracción. Pues bien, la fracción de la cual “procede” un número decimal es su fracción generatriz (genera el número decimal).**

**Para calcular la fracción generatriz, procedemos de la siguiente forma:**

- Si es un número decimal exacto:

$$FG = \frac{\text{Nº completo}}{\text{La unidad seguida de tan tos "0" como cifras decimales hay}}$$

**Ejemplo:**  $3,71 = \frac{371}{100}$

- Si es un número periódico:

*FG*

$$= \frac{\text{Nº completo} - \text{Parte que no está en el periodo}}{\text{Tantos "9" como cifras hay en el periodo y tantos "0" como cifras hay en el anteperiodo}}$$

**Ejemplos:**  $3,717171... = \frac{371-3}{99} = \frac{368}{99}$        $2,425252525... = \frac{2425-24}{990} = \frac{2421}{990}$

3. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

3,5=	4,75=	5,21̄=
2,41̄ =	6,8=	6,002̄ =
7,34̄ =	5,9̄ =	13,59̄ =
0,21522̄ =	41,032̄ =	5,0178̄ =

**UNIDAD DIDÁCTICA 2: FRACCIONES.****FICHA 2: fracciones equivalentes: cálculo de fracciones equivalentes, simplificación de fracciones, ordenación de fracciones.**

**Definición:** Dos fracciones  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son **equivalentes**, y se escribe  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , si al multiplicar sus términos en cruz se obtiene el mismo resultado:  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Ejemplo:

-  $\frac{1}{6}$  es equivalente a  $\frac{2}{12}$  porque  $1 \cdot 12 = 2 \cdot 6$

-  $\frac{3}{5}$  es equivalente a  $\frac{6}{18}$  porque  $3 \cdot 18 = 5 \cdot 6$

1) Comprueba si estas fracciones son equivalentes:

$$\frac{4}{6} \text{ y } \frac{6}{9}$$

$$\frac{12}{25} \text{ y } \frac{60}{75}$$

$$\frac{36}{60} \text{ y } \frac{21}{35}$$

$$\frac{16}{25} \text{ y } \frac{20}{30}$$

$$\frac{81}{120} \text{ y } \frac{54}{80}$$

$$\frac{84}{21} \text{ y } \frac{68}{17}$$

2) Escribe dos fracciones amplificadas de cada una:

$$\frac{2}{5} =$$

$$\frac{11}{13} =$$

$$\frac{5}{9} =$$

$$\frac{18}{21} =$$

$$\frac{7}{8} =$$

$$\frac{2}{11} =$$

**Definición:** Decimos que una fracción es irreducible si el único divisor común del numerador y del denominador es 1.

Para obtener la fracción irreducible de una fracción dada, se dividen el numerador y el denominador de la fracción por el máximo común divisor de ambos términos. La fracción resultante es la fracción irreducible de la fracción dada.

**Ejemplo:**

$$\frac{75}{30} = \frac{75:15}{30:15} = \frac{5}{2} \text{ porque M.C.D (75, 30) = 15}$$

3) Calcula las fracciones irreducibles de cada una de las siguientes fracciones:

a)  $\frac{60}{90} =$

b)  $\frac{72}{48} =$

c)  $\frac{48}{30} =$

d)  $\frac{84}{90} =$

4) Ordena las fracciones de menor a mayor, reduciéndolas previamente a común denominador:

a)  $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$  y  $\frac{7}{9}$

b)  $\frac{5}{11}, \frac{17}{25}$  y  $\frac{7}{12}$

**UNIDAD DIDÁCTICA 2: FRACCIONES.****FICHA 3: Fracción como operador.**

**Una fracción de una cantidad** es igual a dividir la cantidad en tantas partes iguales como indica el denominador y quedarte con tantas partes como indica el numerador.

**Ejemplo:** En la frutería hay 20 melones. Si se venden las  $\frac{3}{4}$  partes del total, ¿cuántos melones se han vendido?

$$\frac{3}{4} \text{ de } 20 = \frac{3}{4} \cdot 20 = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15$$

1. Calcula la fracción de cantidad en cada caso:

a)  $\frac{3}{4}$  de 56 =

b)  $\frac{7}{10}$  de 80

c)  $\frac{11}{4}$  de 18 =

d)  $\frac{8}{3}$  de 39 =

e)  $\frac{4}{7}$  de 230 =

2. Completa los espacios en blanco justificando la respuesta:

a)  $\frac{11}{20}$  de 400 = .....

b)  $\frac{10}{9}$  de 180 = .....

c)  $\frac{3}{20}$  de ..... = 180

d)  $\frac{10}{15}$  de ..... = 4000

3. Un obrero ha trabajado 20 de las 35 horas de las que consta su jornada laboral. ¿Qué fracción de su jornada ha cumplido ya?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. En una granja avícola hay 350 gallinas, hoy han vendido 42. ¿Qué fracción representa el número de gallinas vendidas?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. Una familia tiene unos ingresos mensuales de 2.400 € y dedica las cuatro décimas partes de sus ingresos al pago de la hipoteca del piso. ¿Cuánto paga mensualmente de hipoteca?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
6. En la biblioteca del instituto se han prestado las cuatro quintas partes de los 1.125 libros de lectura que tiene en sus fondos. ¿Cuántos libros se han prestado?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
7. Se han vaciado las tres cuartas partes de la capacidad de un depósito de agua de 3.600 litros. ¿Cuántos litros se han sacado del depósito?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
8. Un camionero ha descargado las tres quintas partes de la carga de su camión. Si el peso total de la carga era de 5.500 kg, ¿qué peso ha descargado?

**UNIDAD DIDÁCTICA 2: FRACCIONES.****FICHA 4: Suma, resta, multiplicación y división de fracciones.**

**Suma y resta de fracciones con el mismo denominador:** Se deja el denominador y se suman los numeradores.

**Ejemplo:**

$$\frac{7}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

**Suma y resta de fracciones con el distinto denominador:** Se reducen a común denominador y luego se suman.

**Ejemplo:**

$$\frac{7}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{6} = \frac{70}{30} + \frac{18}{30} - \frac{20}{30} = \frac{70 + 18 - 20}{30} = \frac{68}{30} = \frac{34}{15}$$

1. Efectúa las operaciones según los modelos y expresando los resultados en forma irreducible:

a)  $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$

b)  $\frac{3}{10} - \frac{1}{5} =$

c)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$

d)  $\frac{1}{6} + \frac{2}{4} =$

e)  $\frac{1}{3} + \frac{3}{6} - \frac{2}{4} =$

f)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - 3 =$

g)  $\frac{-5}{2} + \frac{3}{4} - \frac{8}{3} =$

h)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} =$

$$i) \frac{2}{11} - \frac{4}{5} + \frac{2}{11} - \frac{23}{5} =$$

$$j) \frac{4}{5} + 7 =$$

$$k) 3 - \frac{3}{10} =$$

$$l) 1 - \frac{8}{5} =$$

$$m) \frac{3}{11} + 5 =$$

$$n) \frac{-1}{6} + \frac{3}{9} + \frac{7}{2} =$$

$$o) \frac{11}{36} - \frac{5}{12} + \frac{4}{9} - \frac{7}{24} =$$

$$p) \frac{3}{4} - \frac{7}{5} - \frac{1}{10} - \frac{3}{20} =$$

**Producto de fracciones:** La fracción resultante tiene por numerador el producto de los numeradores y, por denominador, el producto de los denominadores (se multiplican en cruz).

**Ejemplo:**

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$$

**Cociente de fracciones:** La fracción resultante tiene, por numerador, el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y, por denominador, el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda (se multiplican en zig-zag).

**Ejemplo:**

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{35}{9}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\frac{12}{11}} = \frac{15}{7} : \frac{12}{11} = \frac{15 \cdot 11}{7 \cdot 12} = \frac{165}{84} = \frac{55}{28}$$

2. Efectúa las operaciones según los modelos. (Nota: es mejor simplificar las fracciones que se pueda antes de empezar a operar, con el fin de que los números que se utilizan sean menores).

a.  $\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{5}{6} =$

b.  $-5 : \frac{3}{6} =$

c.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} : \frac{2}{3} =$

d.  $\frac{13}{5} : \frac{5}{10} =$

e.  $\frac{-4}{9} : \frac{2}{6} =$

f.  $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} =$

g.  $\frac{2}{3} \cdot 4 =$

h.  $\frac{2}{9} \cdot 3 \cdot \frac{5}{4} =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 2: FRACCIONES.****FICHA 5: Operaciones combinadas con fracciones.**

Para realizar **operaciones combinadas de fracciones**, hay que respetar la jerarquía de las operaciones, que seguirá el siguiente orden:

**Ejemplo:**

- Se efectúan las operaciones que están en el interior de los paréntesis y corchetes.
- Se calculan las potencias y raíces.
- Se realizan las operaciones de multiplicaciones y divisiones en el orden que aparecen de izquierda a derecha.
- Se efectúan las operaciones de suma y resta.

1. Efectúa las siguientes operaciones empleando la prioridad de operaciones:

a)  $\left(3 + \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{2} =$

b)  $\frac{10}{3} \cdot \left(\frac{5}{12} - \frac{3}{8}\right) =$

c)  $\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) : \left(5 - \frac{3}{4}\right) =$

d)  $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) =$

e)  $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{4}\right) : \frac{9}{2} =$

f)  $\left(3 : \frac{15}{4}\right) : \frac{9}{2} =$

$$\text{g) } \left(\frac{1}{2} : \frac{2}{5}\right) : \left(1 - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{9}{2} =$$

$$\text{h) } (2)^2 - \sqrt{25} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{8} + \frac{3}{6} : \frac{2}{3} =$$

$$\text{i) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{6} =$$

$$\text{j) } \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} =$$

$$\text{k) } \frac{4}{5} : \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) - \frac{3}{8}\right] - 3 \cdot \left[\frac{1}{6} : \left(1 - \frac{2}{5}\right)\right] =$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 2: FRACCIONES.****FICHA 6: Castillos de fracciones.**

1. Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

$$\text{a) } \frac{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + 3}$$

$$\text{b) } \frac{\left(\frac{4}{3} - 1\right) - \left(\frac{2}{3} + 3\right)}{\frac{4}{5} - 1 + \frac{3}{2}}$$

$$\text{c) } \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{3}{5}} - \frac{3 + \frac{1}{6}}{\frac{1}{4} - 2}$$

$$\text{d) } \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3} : \left(1 - \frac{2}{5}\right)}{\frac{3}{7} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{2}\right)}$$

$$\text{e) } \frac{7 - \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{3 + \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)}$$

$$f) \frac{3 \cdot \left(-\frac{2}{5} + 1\right) - \frac{3}{4} : \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} : 4}$$

$$g) \frac{\left(3 - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{14}{5} - 2\right)}{\left(8 - \frac{2}{3}\right) : \left(4 - \frac{5}{4}\right)}$$

$$h) \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdot 2}{\left(2 - \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot 2}$$

$$i) 1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 - \frac{1}{6}}}$$

$$j) \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$



5. Un camión cubre la distancia entre dos ciudades en tres horas. En la primera hora hacen  $\frac{3}{8}$  del trayecto, en la segunda los  $\frac{2}{3}$  de lo que le queda y en la tercera los 80 km restantes. ¿Cuál es la distancia total recorrida?
6. Un vendedor despacha por la mañana las  $\frac{3}{4}$  partes de las naranjas que tenía. Por la tarde vende  $\frac{4}{5}$  de las que le quedaban. Si al terminar el día aún le quedan 100 kg de naranjas. ¿Cuántos kg, tenía?
7. De un depósito de agua se saca un tercio del contenido y, después  $\frac{2}{5}$  de lo que quedaba. Si aún quedan 600 litros. ¿Cuánta agua había al principio?
8. ¿Cuántas botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?
9. He gastado las tres cuartas partes de mi dinero y me quedan 900 euros. ¿Cuánto tenía?

10. Con el contenido de un bidón de agua se han llenado 40 botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro. ¿Cuántos litros de agua había en el bidón?

11. Un frasco de perfume tiene una capacidad de  $\frac{1}{20}$  de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de  $\frac{3}{4}$  de litro?

12. Jacinto come los  $\frac{2}{7}$  de una tarta y Gabriela los tres quintos del resto. ¿Qué fracción de tarta ha comido Gabriela? ¿Qué fracción queda?

13. De un depósito que contenía 1.000 litros de agua se han sacado, primero  $\frac{1}{5}$  del total y, después,  $\frac{3}{4}$  del total ¿Cuántos litros quedan?

14. Aurora sale de casa con 300 euros. Se gasta un tercio en libros y, después,  $\frac{4}{5}$  de lo que le quedaba en ropa. ¿Con cuánto dinero vuelve a casa?

15. ¿Cuál es la fracción que multiplicada por  $\frac{3}{5}$  es igual a  $\frac{4}{3}$ ?

16. Los  $\frac{2}{7}$  de los vecinos de la casa de Ángel son extremeños y la cuarta parte de éstos son de Cáceres. Sabiendo que hay seis vecinos de Cáceres. ¿Cuántos vecinos en hay total en la casa de Ángel?

17. En una clase,  $\frac{3}{5}$  de los alumnos hacen el camino de su casa al colegio en coche o en autobús. Si los tres cuartos hacen el viaje en coche y 9 van en autobús ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

18. Los  $\frac{5}{6}$  de lo gastado por una familia este año son 8.700 euros. ¿Cuánto suponen los dos tercios de los gastos de esa misma familia?

19. El propietario de un solar ha decidido venderlo en parcelas. Vendió primero  $\frac{3}{7}$  del mismo, después la mitad de lo restante y aún le quedaron  $244 \text{ m}^2$  sin vender. ¿Cuál era la superficie del local?

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 1: Definición y propiedades de las potencias.****Potencia de un número entero.****Al elevar un número negativo a una potencia:**

- Si el exponente es par, el resultado es positivo:  $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
- Si el exponente es impar, el resultado es negativo:  $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

**IMPORTANTE:** No debes confundir estas expresiones:  $(-3)^2$  y  $-3^2$  pues:

- $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$
- $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

**1.** Calcula el valor de las siguientes potencias:

- $1^{-13} =$
- $(-1)^6 =$
- $(-1)^{-9} =$
- $1^0 =$

**2.** Halla el valor de estas potencias:

- $3^{-2} =$
- $(-7)^{-2} =$
- $(-2)^{-4} =$
- $(-10)^{-3} =$

**3.** Expresa estos números como potencias de base 2.

- $32 =$
- $256 =$
- $1024 =$
- $128 =$
- $1/2 =$
- $1/16 =$

**4.** Expresa como potencia de base 5.

- $\frac{1}{125} =$
- $0,2 =$
- $\frac{1}{3125} =$
- $0,04^{-2} =$

**5.** Expresa estos valores como potencias de exponente positivo.

- a.  $5^{-6} =$
- b.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8} =$
- c.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} =$
- d.  $(-7)^{-3} =$
- e.  $\left(-\frac{1}{11}\right)^{-6} =$
- f.  $\left(\frac{5}{4}\right)^{-7} =$

6. ¿Cuáles de las siguientes potencias dan como resultado un número positivo y, cuáles, uno negativo?

Razona tu respuesta.

- a.  $7^{-6}$
- b.  $(-6)^{-5}$
- c.  $(-2)^{-1}$
- d.  $6^{-3}$
- e.  $(-3)^{-4}$
- f.  $(-5)^{-7}$

7. Ordena de menor a mayor estos números.

- a.  $-5^0$        $2^{-2}$        $-2^{-3}$        $3^{-2}$        $(-1)^4$
- b.  $(-2)^0$        $(-2)^1$        $(-2)^2$        $2^{-2}$        $(-2)^{-2}$
- c.  $8^0$        $4^{-2}$        $2^{-3}$        $-4^2$        $0^4$

8. Ordena de menor a mayor.

$$\left(\frac{8}{3}\right)^{-3} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad \left(-\frac{5}{7}\right)^{-3}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 2: Operaciones con potencias.****Producto de dos potencias.**

Si multiplicamos dos potencias con la misma base tenemos:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

**Ejemplo:**  $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

**Cociente de dos potencias.**

Si dividimos dos potencias con la misma base tenemos:  $a^m : a^n = a^{m-n}$

**Ejemplo:**  $3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$

**Elevar una potencia a un número.**

Si elevamos una potencia a un número tenemos:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

**Ejemplo:**  $(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$

1. Escribe como una única potencia:

a.  $(-2)^5 \cdot (+5)^5 =$

b.  $(+4)^3 \cdot (-5)^3 =$

c.  $(-6)^4 : (+3)^4 =$

d.  $(-5)^{11} : (+5)^{11} =$

e.  $(-15)^4 : (-5)^4 =$

f.  $(-2)^2 \cdot (-2)^3 =$

g.  $(+3)^3 \cdot (+3) =$

h.  $(-6)^9 : (-6)^7 =$

i.  $(-5)^{14} : (-5)^{11} =$

j.  $[(-6)^8 : (-6)^4] : (-3)^4 =$

k.  $[(-2)^2 \cdot (-2)^4] : (-2)^6 =$

l.  $(-3)^4 : [(-15)^6 : (-5)^2] =$

2. Halla el resultado de las operaciones.

a.  $81^{-3} \cdot 3^{13} =$

b.  $81^{-2} : 3^{-9} =$

c.  $9^{-2} : 3^{-6} =$

d.  $625^{-2} \cdot 5^{10} =$

3. Calcula:

a.  $2^{-3} \cdot 5^2 \cdot 5^{-3} =$

b.  $18^{-3} \cdot 9^{-3} \cdot 4^{-3} =$

c.  $3^{-1} \cdot 2^{-4} \cdot 11^2 \cdot 3^{-3} =$

d.  $(5^{-2})^3 \cdot 2^{-4} \cdot 1400 \cdot 2^{-2} =$

4. Expresa el resultado como potencia de base 3.

a.  $9 \cdot 27 \cdot 81 =$

b.  $39^6 \cdot (-13)^6 =$

c.  $((-729) \cdot (-81))^5 =$

d.  $135^{-5} \cdot 15^{-5} =$

5. Simplifica estas expresiones utilizando las propiedades de las potencias.

a.  $\frac{3^{-5} \cdot 2^7 \cdot 5^{-3}}{9^{-3} \cdot 4^2 \cdot 5^{-1}} =$

b.  $\frac{a^{-4} \cdot b^{-7} \cdot c^4}{a^{-8} \cdot b^2 \cdot c^{-5}} =$

c.  $\frac{2^{-5} \cdot 3^6 \cdot 25^{-3}}{9^{-2} \cdot 2^3 \cdot 5^{-2}} =$

d.  $\frac{81^{-4} \cdot 8^3 \cdot 25^{-2}}{9^{-9} \cdot 4^6 \cdot 125^{-1}} =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 3: Expresión en notación científica.**

Para expresar un número en notación científica dependerá de:

- Si tiene parte entera diferente de 0, entonces se corre la coma hacia la izquierda dejando un único dígito como parte entera y se multiplica por  $10^a$  siendo a en número de veces que se ha movido.

Ej:  $132 = 1,32 \cdot 10^2$

- Si tiene parte entera 0, entonces se corre la coma hacia la derecha hasta dejar un único dígito diferente a 0 como parte entera y se multiplica por  $10^{-a}$  siendo a en número de veces que se ha movido.

Ej:  $0,000073 = 7,3 \cdot 10^{-5}$

1. Escribe estos números con todas sus cifras:

- $4 \cdot 10^7 =$
- $8,5 \cdot 10^6 =$
- $5 \cdot 10^{-3} =$
- $3,6 \cdot 10^9 =$
- $9,75 \cdot 10^8 =$
- $1,5 \cdot 10^{-4} =$

2. Escribe estos números en notación científica:

- 13700000 =
- 4600000000 =
- 0,00000006 =
- 0,00000134 =

3. Calcula el valor de estas potencias de 10 fijándote en los exponentes.

- $10^0 =$
- $10^3 =$
- $10^{-2} =$
- $10^6 =$
- $10^{-1} =$
- $10^4 =$
- $10^1 =$
- $10^{-3} =$

4. Expresa los siguientes números como potencias de base 10.

- a.  $1000 =$
- b.  $100000 =$
- c.  $0,01 =$
- d.  $0,0001 =$
- e.  $0,0000001 =$
- f.  $0,00000000000001 =$

5. Escribe los siguientes números usando notación científica.

- a.  $0,0000000000000065 =$
- b.  $0,0000000000000000000000362 =$
- c.  $0,00000000000000000000000002 =$
- d.  $0,00000000000000000000000004587 =$

6. ¿Cuál es el mayor de estos números?

$$1,06 \cdot 10^{-6} \quad 2,06 \cdot 10^{-8} \quad -1,06 \cdot 10^6 \quad 11,6 \cdot 10^{-6}$$

7. Ordena los siguientes números de menor a mayor.

$$1,1 \cdot 10^{-7} \quad 0,2 \cdot 10^{-8} \quad 1,2 \cdot 10^{-8} \quad 0,12 \cdot 10^{-7}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 4: Operaciones en notación científica.****Suma o resta de números expresados en notación científica.**

Para sumar o restar números expresados en notación científica, se expresan todos los sumandos en un mismo orden de magnitud, se saca como factor común la potencia de 10 y se suman los números decimales. El resultado debe expresarse en notación científica.

**Ejemplo:**

$$2,3 \cdot 10^3 + 1,4 \cdot 10^4 = 2,3 \cdot 10^3 + 14 \cdot 10^3 = (2,3 + 14) \cdot 10^3 = 16,3 \cdot 10^3 = 1,63 \cdot 10^4$$

**Multiplicación o división de números expresados en notación científica.**

Para multiplicar o dividir números expresados en notación científica, se multiplican o dividen, por un lado, los números decimales y, por otro, las potencias de base 10. El resultado debe expresarse en notación científica.

**Ej:**  $2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^7$

1. Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a.  $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3) =$

b.  $(3,4 \cdot 10^{10}) \cdot (5 \cdot 10^{-4}) =$

c.  $(4 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5) =$

d.  $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-6}) =$

2. Calcula mentalmente y comprueba con la calculadora.

a.  $(2 \cdot 10^6) \cdot (3 \cdot 10^{11}) =$

b.  $(1,5 \cdot 10^{-2}) \cdot (2 \cdot 10^{-4}) =$

c.  $(3,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{16}) =$

d.  $(8 \cdot 10^{11}) : (4 \cdot 10^{14}) =$

e.  $(9 \cdot 10^3) : (3 \cdot 10^{-3}) =$

f.  $(4,4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-4}) =$

g.  $(8 \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) =$

3. Expresa en notación científica y calcula:

a.  $\frac{0,00054 \cdot 1200000}{250000 \cdot 0,0002} =$

b.  $\frac{1320000 \cdot 25000}{0,001 \cdot 0,002} =$

c.  $\frac{0,000015 \cdot 0,0004}{1250000 \cdot 60000} =$

d.  $(0,008)^2 \cdot (30000)^2 =$

4. Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a.  $546000000 + 212000 =$

b.  $0,000000037 + 0,0000000000065 =$

c.  $0,000025 - 0,00032 =$

d.  $0,00000000000000000000009834 - 0,000000000000000009 =$

5. Resuelve y expresa el resultado en notación científica.

a.  $7,23 \cdot 10^4 + 1,1 \cdot 10^4 =$

b.  $4 \cdot 10^9 - 2,4 \cdot 10^{10} =$

c.  $4,2 \cdot 10^{-3} + 3,72 \cdot 10^{-1} - 2,5 \cdot 10^{-2} =$

d.  $7,2 \cdot 10^{-7} - 8,3 \cdot 10^{-9} + 2,132 \cdot 10^{-5} =$

6. Calcula e indica el resultado en notación científica.

a.  $12 \cdot 10^{-7} \cdot 0,006 =$

b.  $(0,042 \cdot 10^5) : (0,0007 \cdot 10^{-4}) =$

c.  $0,0000000076 \cdot (0,475 \cdot 10^{10}) =$

d.  $(0,00000024 \cdot 10^{13}) : (2 \cdot 10^{-8}) =$

7. Efectúa las operaciones indicadas y expresa el resultado en notación científica.

a.  $\frac{3,52 \cdot 10^5 + 4,72 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^2 - 4,2 \cdot 10^2} =$

b.  $\frac{1,4 \cdot 10^{-3} + 2,3 \cdot 10^{-2}}{4,2 \cdot 10^{-8} - 6 \cdot 10^{-9}} =$

c.  $\frac{2,5 \cdot 10^7 + 3,6 \cdot 10^5}{7 \cdot 10^3 - 3,2 \cdot 10^4} =$

d.  $\frac{2,4 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^{-5}}{4,2 \cdot 10^{-7} - 3,6 \cdot 10^{-7}} =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 5: Problemas de potencias y notación científica.**

Para la resolución de problemas es muy importante plantear los datos y, en caso de necesitar notación científica, operar así, ya que se reducen las operaciones.

**Ejemplo:** Una célula tiene cerca de 2.000.000.000.000 de átomos. Calcula la cantidad de átomos que habrá en tres billones de células. Expresa el resultado en notación científica.

$$2.000.000.000.000 \text{ de átomos} = 2 \cdot 10^{12} \text{ átomos por célula}$$

$$3 \text{ billones de células} = 3.000.000.000.000 = 3 \cdot 10^{12} \text{ células}$$

$$2 \cdot 10^{12} \cdot 3 \cdot 10^{12} = 6 \cdot 10^{24} \text{ átomos en total}$$

1. La masa de la Tierra es de  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg. ¿Cuál sería la masa equivalente a 5 planetas iguales a la Tierra?
2. Escribe en notación científica la edad que tendría una persona que haya vivido mil doscientos cuarenta mil millones de segundos.
3. Una biblioteca tiene 2.753.255 libros. Si cada libro tiene por término medio 287 páginas y una persona puede leer una página cada 3 minutos. ¿Cuántos segundos tardaría una persona en leer todos los libros a un ritmo de 9 horas diarias? Exprésalo en notación científica.



**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 6: Definición de radical.**

**Definición:** Dados un número “a” y un número entero positivo “n”, se llama radical o raíz n-ésima de “a” al número “b” cuya n-ésima potencia es a.

$$b = \sqrt[n]{a} \text{ si } b^n = a$$

**Ejemplo:**  $2 = \sqrt[3]{8}$  ya que  $2^3 = 8$

**Formas de expresar un radical:**  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

**Ejemplo:**  $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

1. Escribe en forma de radical estas potencias.

a.  $5^{\frac{1}{6}} =$

b.  $2^{-\frac{3}{7}} =$

c.  $3^{\frac{2}{3}} =$

d.  $4^{-\frac{1}{2}} =$

e.  $7^{\frac{3}{5}} =$

f.  $6^{\frac{-6}{13}} =$

2. Expresa estos radicales como potencias.

a.  $\sqrt[3]{19} =$

b.  $\sqrt{5} =$

c.  $\sqrt[4]{21} =$

d.  $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} =$

e.  $\sqrt[15]{6^{-7}} =$

f.  $\sqrt[5]{8^{-1}} =$

3. Escribe estos radicales como potencias de base 3.

a.  $\sqrt[5]{3^2} =$

b.  $\sqrt[4]{81} =$

c.  $\sqrt[6]{3^7} =$

d.  $\sqrt[4]{3^{14} \cdot 3^3} =$

4. Halla la expresión de estos radicales como potencias de base 2 y exponente fraccionario.

a.  $\sqrt[3]{16} =$

b.  $\sqrt[4]{32} =$

c.  $\sqrt[6]{4} =$

d.  $\sqrt[4]{2^4 \cdot 4} =$

5. Indica razonadamente si existen las siguientes raíces y di su valor.

a.  $\sqrt[3]{-27} =$

b.  $\sqrt{144} =$

c.  $\sqrt[4]{-1} =$

d.  $\sqrt[5]{\frac{243}{32}} =$

e.  $\sqrt{\frac{-9}{4}} =$

f.  $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} =$

6. Calcula en los casos que sea posible, el valor de estas raíces.

a.  $\sqrt{\frac{1}{121}} =$

b.  $\sqrt[5]{\frac{243}{32}} =$

c.  $\sqrt[3]{\left(\frac{125}{216}\right)^{-1}} =$

d.  $\sqrt[3]{8000^{-1}} =$

e.  $\sqrt{0,04^{-1}} =$

f.  $\sqrt[4]{\left(\frac{-625}{16}\right)^{-1}} =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 7: Propiedades de los radicales.****Propiedades de los radicales**

- Si son productos o cocientes de raíces del mismo índice se operan los valores de dentro del radical.

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6} \qquad \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4}$$

- Si elevamos un radical a un número el valor elevado se multiplica con el exponente.

$$\text{Ejemplo: } (\sqrt[3]{2^2})^6 = \sqrt[3]{2^{12}}$$

- El radical de un radical es otro radical con el mismo radicando y cuyo índice es el producto de los índices.

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$$

**1. Simplifica estos radicales.**

a.  $\sqrt[6]{5^2} =$

b.  $\sqrt[12]{5^3} =$

c.  $\sqrt[24]{5^8} =$

d.  $\sqrt[20]{5^4} =$

**2. Expresa estos radicales como raíces cúbicas.**

a.  $\sqrt[9]{27} =$

b.  $\sqrt[6]{4} =$

c.  $\sqrt[6]{25} =$

d.  $\sqrt[12]{16} =$

**3. Simplifica los siguientes radicales.**

a.  $\sqrt[15]{3^3} =$

b.  $\sqrt[6]{2^2} =$

c.  $\sqrt[16]{11^4} =$

d.  $\sqrt[35]{13^7} =$

4. Expresa como un radical con índice 105.

a.  $\sqrt[3]{2} =$

b.  $\sqrt[5]{3} =$

c.  $\sqrt[7]{5} =$

d.  $\sqrt[15]{7} =$

e.  $\sqrt[21]{15} =$

f.  $\sqrt[35]{21} =$

5. Reduce estos radicales a índice común.

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt[3]{3}$$

6. Ordena de menor a mayor estos radicales.

a.  $\sqrt{2} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt[3]{3}$

b.  $\sqrt{6} \quad \sqrt[5]{6} \quad \sqrt[3]{3}$

c.  $\sqrt{7} \quad \sqrt[5]{35} \quad \sqrt[3]{22}$

d.  $\sqrt{5} \quad \sqrt[4]{18} \quad \sqrt[3]{12}$

7. Simplifica las operaciones aplicando las propiedades de los radicales.

a.  $\sqrt{15} \cdot \sqrt{60} =$

b.  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}} =$

c.  $(\sqrt{3})^6 =$

d.  $\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{16} =$

e.  $(\sqrt[4]{\sqrt[3]{243}})^2 =$

f.  $\frac{\sqrt{\sqrt{9072}}}{\sqrt[4]{2}} =$

8. Expresa los radicales en forma de potencia de base 2.

a.  $\sqrt[4]{16^3} =$

b.  $\sqrt[5]{2^{-7}} =$

c.  $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{32}}} =$

d.  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27} + 1} =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: POTENCIAS Y RAÍCES****FICHA 8: Extracción de factores y operaciones con radicales.**

**Extracción de factores:** Se puede hacer si el exponente es mayor que el índice.

$$\sqrt{2^7} = \sqrt{2^6 \cdot 2} = 2^3 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

**Operaciones con radicales:**

- Si son sumas o restas con mismo radical se operan los coeficientes.

**Ejemplo:**  $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - \sqrt{5} = (2 + 7 - 1)\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

- Aplicar propiedades cuando sea necesario.

1. Extrae todos los factores posibles de estos radicales.

a.  $\sqrt{2^5} =$

b.  $\sqrt[5]{6^{13}} =$

c.  $\sqrt[3]{7^{14}} =$

d.  $\sqrt[7]{3^{32}} =$

2. Extrae todos los factores posibles.

a.  $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^7} =$

b.  $\sqrt[4]{2^6 \cdot 3^9 \cdot 7^{12}} =$

c.  $\sqrt[6]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 5^{22}} =$

d.  $\sqrt{2^{13} \cdot 3^{17} \cdot 7^{10}} =$

3. Introduce los factores dentro de la raíz en cada caso.

a.  $2^3 \cdot 3 \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} =$

b.  $5^2 \cdot 7^5 \sqrt[8]{5^{12} \cdot 7^5} =$

c.  $2^4 \cdot 11^2 \sqrt[5]{2^3 \cdot 11^4} =$

d.  $3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^6 \sqrt[7]{3^2 \cdot 5^{15} \cdot 7^8} =$

## 4. Opera:

a.  $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} =$

b.  $7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} =$

c.  $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{125} =$

d.  $\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{32} =$

## 5. Calcula:

a.  $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} =$

b.  $\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} =$

c.  $\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{50} =$

d.  $3\sqrt{3} + \sqrt{12} - 2\sqrt{75} =$

e.  $-6\sqrt{5} + \sqrt{125} - \sqrt{20} =$

f.  $2\sqrt{28} - 3\sqrt{63} - \sqrt{175} =$

## 6. Realiza los productos y simplifica los resultados.

a.  $(2 - \sqrt{5})(1 + 3\sqrt{5}) =$

b.  $(1 + 2\sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) =$

c.  $(2 - 3\sqrt{6})(1 - \sqrt{5}) =$

d.  $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) =$

7. Calcula y simplifica.

a.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$

b.  $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} =$

c.  $3(2 + \sqrt{2}) =$

d.  $-2(5 - \sqrt{7}) =$

e.  $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} - 5) =$

f.  $-\sqrt{7} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$

g.  $(3 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{3}) =$

h.  $(4 + \sqrt{7}) \cdot (8 - \sqrt{2}) =$

8. Realiza las operaciones y simplifica.

a.  $(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) =$

b.  $(1 - \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{3}) =$

c.  $(3 + \sqrt{2})^2 =$

d.  $(2 - 5\sqrt{3})^2 =$

e.  $(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1) - (\sqrt{5} - 1)^2 =$

f.  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$

g.  $\sqrt{\sqrt{2}} - (\sqrt[8]{2} + 1)^2 + 2\sqrt[8]{2} =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 4: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 1: Relación de proporcionalidad directa e inversa.**

**1. PROPORCIÓN DIRECTA:** Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción directa si al aumentar una de ellas el doble la otra aumenta el doble, si ésta aumenta el triple la otra aumenta el triple, etc. En definitiva, si una de ellas aumenta la otra también lo hace y además en la misma proporción. Y si al disminuir una de ellas la otra disminuye la misma proporción.

**2. PROPORCIÓN INVERSA:** Se dice que dos magnitudes están en relación de proporción inversa si al aumentar una de ellas la otra disminuye la misma proporción y si al disminuir una la otra aumenta la misma proporción.

1. Indica, en cada caso, si existe proporcionalidad directa (D), inversa (I) o ninguna de las dos (X):

a) El número de personas que van en el tren y la recaudación del tren.	
b) El número de páginas de un libro y su precio.	
c) El número de animales que posee un granjero y la cantidad de pienso que gasta a la semana.	
d) El número de páginas de un libro y el peso que tiene.	
e) El número de hijos de una familia y el número de días que tiene de vacaciones la madre.	
f) El tamaño de una caja y el número de cajas iguales que se pueden almacenar en una nave.	
g) El caudal (litros/minuto) que arroja un manantial y el tiempo que tarda en llenar 100 litros.	
h) El tiempo que tenemos colocado un cántaro en la fuente y la cantidad de agua que recogemos.	
i) El tiempo que está encendida una bombilla y el gasto de energía.	

j) La velocidad de un autobús y el tiempo que tarda en cubrir la distancia entre dos ciudades.	
k) El precio de un coche y el número de asientos que lleva.	
l) El número de horas trabajadas por un obrero y el salario que gana.	
m) El número de trabajadores y el tiempo empleado en hacer determinado trabajo.	
n) Volumen de una cantidad de aceite y su peso.	
ñ) Litros de gasolina y kilómetros que puede recorrer un coche.	
o) Tiempo empleado en recorrer una distancia y velocidad a la que va la persona.	
p) Cantidad de árboles y cantidad de oxígeno producido.	
q) Cantidad de prendas de ropa y cantidad de abrigos.	
r) El precio de la entrada y el tiempo que dura la película.	
s) El precio de las peras y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.	
t) La edad de una persona y su altura.	
u) La distancia que recorre un coche y el número de puertas que tiene.	
v) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir cierta distancia.	

**UNIDAD DIDÁCTICA 4: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 2: Proporcionalidad simple.**

**Definición:** Se dice que dos magnitudes están en **relación de proporción directa** si al aumentar una de ellas el doble la otra aumenta el doble, si ésta aumenta el triple la otra aumenta el triple, etc. En definitiva, si una de ellas aumenta la otra también lo hace y además en la misma proporción. Y si al disminuir una de ellas la otra disminuye la misma proporción.

**EJEMPLO:** Pedro ha comprado 4 paquetes de golosinas por un total de 8€. ¿Cuánto le costarán 2 latas?

**1. Planteamos cada magnitud en una columna distinta de dos entradas con los datos del problema, poniendo x en el lugar de la que no conocemos (¡Ojo! no se pueden mezclar magnitudes en una misma columna).**

**Nº paquetes**    **D**    **precio (€)**

4                    8

3                    x

**2. Justificamos que la relación es directa y ponemos una D.**

**3. Para calcular el valor de x en una proporción directa dividimos por columnas en el mismo orden e igualamos.**

**Después despejamos la x como si fuera una ecuación.**

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$$

**Método de reducción a la unidad:** Otra manera alternativa de hacerlo, si las operaciones son sencillas es, calculando en primer lugar lo que vale una paquete ( $8 : 4 = 2$  €) y concluir después que 3 paquetes serán  $3 \times 2 = 6$  €.

1. En el equipo de fútbol del barrio han jugado como porteros Luis y Daniel. A Luis le han marcado 13 goles en 10 partidos jugados. Daniel jugó 15 partidos y le marcaron 18 goles. ¿Cuál de los dos ha tenido mejores actuaciones?

2. Un coche tarda en recorrer 120 km en 80 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 200 km?

3. Un deportista recorre 4.500 m. en 10 minutos. ¿Cuántos km. recorrerá en media hora?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. El precio por kilo de queso brie es de 24€. ¿Cuánto nos costarán 125 g de queso?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. Pablo marca 2 goles cada 9 minutos de partido. Calcular mediante una regla de tres cuántos goles marcará en una hora y media.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
6. Pablo se gasta 6 kg de garbanzos en un cocido para sus padres y seis hermanos. ¿Cuántos kilos de garbanzos se gastará en hacer el cocido si vienen dos hermanos más?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
7. Para obtener el certificado de francés se necesita obtener un 6 sobre 10 en un test de 162 preguntas. Calcular el número mínimo de preguntas correctas necesarias para obtenerlo.

8. Un automóvil ha tardado en hacer el recorrido Madrid-Valencia tres horas y cuarto a una media de 120 km/h. ¿Cuánto tardará un autobús a una media de 90 km/h?
9. Para alimentar a 30 gatos se necesitan 45 kg. de comida. Si llegan 12 gatos más, ¿Cuánta comida necesitamos?
10. Seis máquinas excavadoras hacen una zanja en 18 días, si pasan a ser 10 excavadoras, ¿Cuánto tardarán en abrir la zanja?
11. Seis personas realizan un trabajo en 12 días, ¿cuánto tardarán 8 personas?
12. Seis fotocopadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿cuánto tiempo tardarían 4 fotocopadoras en realizar el mismo trabajo?

13. Para construir una casa en ocho meses han sido necesarios seis albañiles. ¿Cuántos habrían sido necesarios para construir la casa en tan sólo tres meses?
14. Un granjero tiene pienso en su almacén para alimentar 2500 gallinas durante 60 días. ¿Cuántas gallinas debe vender si desea que el pienso le dure 80 días?
15. Dieciocho alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?
16. Tres trabajadores recolectan 100 naranjos en 5 horas. Uno de ellos ha sufrido un accidente laboral y no puede continuar con su tarea. Calcular cuánto se tardará en recolectar los 300 naranjos restantes entre los dos trabajadores activos.

**UNIDAD DIDÁCTICA 4: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 3: Regla de tres compuesta.**

**Ejemplo:** Dos obreros trabajando 4 horas diarias realizan un trabajo en 16 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 4 obreros trabajando 8 horas?

<u>Nº obreros</u>	<u>I</u>	<u>trabajo(horas)</u>	<u>I</u>	<u>tiempo (días)</u>
2		4		16
4		8		x

1. Justificamos si la relación de cada columna con la columna de la incógnita es directa o inversa y ponemos una I o una D.

2. Para calcular el valor de x en una proporción compuesta dividimos por columnas (las inversas en orden inverso) multiplicando todos los resultados de las columnas sin la 'x' e igualamos. Después despejamos la x como si fuera una ecuación.

El orden de la columna de la x no se cambia.

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{8}{4} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 4 \cdot 2}{4 \cdot 8} = 4$$

1. Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas? Resolver el problema aplicando el método de las proporciones.

2. En una fábrica 6 máquinas iguales producen en 2 horas 600 piezas. ¿Cuántas piezas producirán 9 de estas máquinas en 3 horas? Resolver el problema aplicando el método de reducción a la unidad.





12. Un equipo de 8 personas trabajará 6 horas diarias para desarrollar un software en un año. Si se forma un equipo de 10 personas trabajando 4 horas diarias, ¿cuántos años se necesitan para realizar un proyecto de la misma envergadura?
13. Se sabe que 6 mangueras abiertas durante 3 horas equivalen a 10.000 litros. ¿Cuánto tiempo se necesita para llenar una piscina de 130.000 litros con 4 de estas mangueras?
14. Si con 4 grifos de agua cuyas bocas de salida son de  $2\text{cm}^2$  se obtienen 300 litros en un determinado tiempo, ¿cuántos litros se obtienen en el mismo tiempo con 2 grifos con bocas de  $3\text{cm}^2$ ?
15. Los 14 depósitos para el suministro de agua a una población tienen la misma capacidad. Para llenar 5 de ellos se necesitan 4 bombas que estén funcionando durante 10 horas. Si queremos llenar todos los depósitos, ¿durante cuánto tiempo deberán estar funcionando 8 bombas iguales a las mencionadas antes?

**UNIDAD DIDÁCTICA 4: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 4: Cálculo de porcentajes.**

**Definición de porcentaje de un número: Es el número de partes que tomamos de un número después de haberlo dividido en 100 partes iguales.**

**Ejemplo:**  $12\% \text{ de } 60 = \frac{12}{100} \text{ de } 60 = \frac{12 \cdot 60}{100} = 7,2$

1. Completa la siguiente tabla. Simplifica las fracciones tanto como sea posible.

<b>PORCENTAJE</b>	<b>35</b>				<b>80</b>		<b>95</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	
<b>FRACCIÓN</b>		$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$							
<b>NÚMERO DECIMAL</b>				<b>2'5</b>		<b>0'13</b>				<b>1'35</b>

2. Calcula el % de las siguientes cantidades:

a) 37 % de 40 =

b) 24 % de 80 =

c) 63 % de 100 =

d) 20 % de 80 =

e) 30 % de 200 =

f) 25 % de 4000 =

g) 6 % de 1512 =

h) 16 % de 14600 =

**3. Calcula mentalmente:**

10 % de 2500 =

10 % de 250 =

15 % de 100 =

15 % de 1000 =

20 % de 800 =

40 % de 500 =

18 % de 1000 =

60 % de 2400 =

40% de 4000 =

10 % de 20000 =

**4. Calcula con lápiz y papel:**

27 % de 456 =

75 % de 48 =

36 % de 52'8 =

63 % de 1850 =

4,4 % de 4,4 =

120 % de 150 =

62 % de 2200 =

300 % de 1500 =

**5. ¿Qué porcentaje es?**

**a.** 40 de 120

**b.** 80 de 15

**c.** 0,2 de 3,2

**d.** 36 de 0,9

**e.** 50 de 300

**f.** 1.400 de 200

**g.** 0,001 de 1.000

**h.** 48 de 0,6

**i.** 10 de 5.000

6. Completa las casillas vacías:

a) 50% de  = 100

b) 10% de  = 30

c) 40% de  = 200

d) 5% de  = 20

e) 2% de  = 12

f) 12% de  = 6

7. Completa las casillas vacías:

a) El  % de 1000 es 100

b) El  % de 50 es 25

c) El  % de 100 es 25

d) El  % de 100 es 75

e) El  % de 40 es 12

f) El  % de 200 es 8

**UNIDAD DIDÁCTICA 3: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 5: Aumentos y disminuciones porcentuales.**

**Aumento:** Después del aumento de este año de un 10%, el sueldo de mi madre es ahora de 1938 euros.

¿Cuánto cobraba antes?

**Método 1:** Mediante una regla de tres que siempre es directa.

Sueldo (€)	%
1938	→ 100 + 10
x	→ 100

Ojo: Tomando siempre como referencia el 100 %, si se habla de aumento, uno de los porcentajes va a ser 110 % que naturalmente se refiere a los 1938 €. Por eliminación, el 100% se refiere a lo que nos preguntan.

**Método 2:** directamente buscando el sueldo x de modo que:

$$x + 10 \% \text{ de } x = 1938$$

**Observación:** Comprueba que, si descuentas el 10% al salario final, no obtienes el sueldo inicial. ¡OJO!

¡Los porcentajes no son recuperables!

**Disminución:** En una tienda de mi barrio un balón de fútbol cuesta 50€ y nos hacen una rebaja del 12 %.

¿Cuánto cuesta el balón con la rebaja?

**Método 1:** Mediante una regla de tres que siempre es directa.

Precio (€)	%
50	→ 100
x	→ 100 - 12

Ojo: Tomando siempre como referencia el 100%, el precio inicial del balón se corresponde con el 100% y después de rebajarlo pasa al 88% del precio original que va a corresponderse con la incógnita.

**Método 2:** directamente calculando el 88% de 50 que es 44€:

1. En marzo un crucero cuesta 840€ y en agosto aumenta su precio un 30%, ¿cuánto cuesta en agosto?

2. De 5 toneladas de carbón de una mina se eliminan 2.400 kg de impurezas. ¿Qué tanto por ciento es carbón puro?



8. Un producto que costaba 350 € sufre un descuento del 18 %. ¿Cuánto hemos pagado finalmente por el producto?
9. A comienzos de año, la panadería de mi barrio ha subido los precios un 10%. Si antes de la subida una barra normal costaba 80 céntimos, ¿cuánto cuesta tras el aumento de precio?
10. El precio de una cafetera, después de cargarle un 18 % de impuestos, es de 70,80 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle esos impuestos?
11. ¿Qué recargo ha de aplicarse a una camisa que cuesta 50 euros para obtener unos beneficios de 13 euros?
12. Al bajar el precio de una bicicleta un 10 %, el precio final es ahora de 360 euros. ¿Cuál era el precio inicial?

**13.** El precio de un litro de gasóleo era de 0'65 euros y, al cabo de un año, se transformó en 0'51 euros.  
¿Cuál ha sido el porcentaje de bajada?

**14.** Una familia come en un restaurante por 64 €. ¿Cuánto tendrán que pagar si a ese valor se le añade el 7% de IVA?

**15.** En el cine han subido el precio de la entrada un 7%. ¿Cuál será el nuevo precio si costaba 6 €?

**16.** He pagado 39'6 € por un balón de baloncesto. Si me han hecho un descuento del 12%, ¿cuánto costaba el balón?

**17.** A Alfredo le han subido el sueldo un 8 € y ahora cobra 1350 € al mes. ¿Cuánto cobraba al mes antes de la subida salarial?

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 6: Porcentajes sucesivos.**

**En marzo un crucero cuesta 840 €, en agosto aumenta su precio un 30% y en noviembre baja un 35% respecto de agosto, ¿cuánto cuesta en noviembre?**

**Método:** Calcular el valor multiplicativo de aumento y de disminución.

Si aumenta un 30%, entonces multiplicaremos por  $1 + 30/100$ , es decir,  $1'30$ .

Si disminuye un 35%, entonces multiplicaremos por  $1 - 35/100$ , es decir,  $0'65$ .

Por tanto, el valor en noviembre será:  $840 \cdot 1'30 \cdot 0'65 = 709'8€$

1. Un ordenador cuesta 600 € sin el 21 % de IVA. me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. ¿Cuánto he pagado?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Una camiseta costaba 25 € a falta de un impuesto del 10 %. En temporada de rebajas descuentan un 20%, ¿qué precio pagaré en rebajas?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. Un producto que costaba 500 € sufre un incremento porcentual del 15 % y tiene un descuento del 5% sobre el precio incrementado si eres familia numerosa ¿Cuánto hemos pagado finalmente por el producto si soy familia numerosa?



8. Por un artículo que estaba rebajado dos veces un 12 % y un 7% hemos pagado 25 euros. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja?
9. El precio de un litro de gasóleo era de 0'51 euros, al cabo de un año, se transformó en 0'65 euros y al cabo de 2 años en 0'73. ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida cada año?
10. El precio de un litro de leche (sin I.V.A.) es de 0'6 euros. Sabiendo que el IVA en alimentación es del 4 %, y que el supermercado quiere ganar un 15 % más ¿cuál será su precio final?
11. Un artículo que costaba inicialmente 60 euros fue rebajado en diciembre un 12 %. En el mes de enero tuvo una segunda rebaja de un 15 %; y, en febrero, se rebajó otro 10 %.
- Calcula el precio final después de las tres rebajas.
  - ¿Cuál es el porcentaje total de rebaja?

- 12.** El precio sin I.V.A. de un determinado medicamento es de 15 euros.
- Sabiendo que el I.V.A. es del 4 %, ¿cuánto costará con I.V.A.?
  - Con receta médica solo pagamos el 40 % del precio total. ¿Cuánto nos costaría este medicamento si lo compráramos con receta?
- 13.** Un contrato de alquiler ha subido un 2 % anual durante los dos últimos años. Si hace 2 años pagábamos 5000€ al año. ¿Cuánto pagaremos ahora?
- 14.** Un producto sin impuestos cuesta 50€, si tiene dos impuestos del 6% y del 15%. ¿Cuánto cuesta al final?
- 15.** Una cama cuesta 600€ con dos impuestos del 21% y del 3%. ¿Cuánto costaría sin impuestos?

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 7: Interés simple.**

Calcula en cuánto se convertirán 1000 € invertidos al 3 % de interés anual simple durante 5 años.

Fórmula que usar:

$$C_f = C_0 + I = C_0 + \frac{C_0 \cdot r \cdot t}{100}$$

**Método:** Sustituimos en la fórmula los distintos valores.

$$C_f = 1000 + \frac{1000 \cdot 3 \cdot 5}{100} = 1150€$$

1. Calcula a cuánto ascenderán los intereses que producirán 5000 € colocados al 8 % de interés simple anual durante 1, 2 y 7 años.

2. ¿Qué capital se obtendría al depositar 1500 € al 6 % de interés simple anual?

3. ¿Cuánto tiempo habría que mantener 4600 € al 5 % anual para conseguir unos intereses de 1380 €?

4. ¿Durante cuantos años habría que depositar 12000 € para conseguir 13260 € al 3,5 % simple anual?

5. Pablo puso 6000 € a interés simple durante 4 años. ¿A qué rédito ha estado generando intereses si retira 6500 €?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
6. Pedro le ha pedido 300 € a un amigo. Le ha dicho que si se los presta durante 2 años le devolverá 27 € más. ¿Qué interés simple anual tiene pensado pagar Pedro?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
7. María ha hecho una inversión al 9,8 % simple anual por la que espera conseguir en 3 años unos intereses de 676,20 €. ¿Cuánto dinero ha invertido María?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
8. Calcula el capital final invirtiendo 2000 € al 7 % de interés simple durante 3, 4 y 5 años.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
9. Ana colocó 3500 € a interés simple durante 7 años. ¿A qué rédito ha estado generando intereses si retira 4480 €?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
10. Se desea aumentar un 10 % un capital de 5300 €. ¿Cuántos años debe permanecer depositado al 5 % anual para conseguirlo?

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES****FICHA 8: Interés compuesto.**

Calcula en cuanto se convertirán 1000€ invertidos al 3% de interés anual compuesto durante 5 años.

Fórmula que usar:

$$C_f = \left( \frac{100 + r}{100} \right)^t \cdot C_0$$

**Método:** Sustituimos en la fórmula los distintos valores.

$$C_f = \left( \frac{100 + 3}{100} \right)^5 \cdot 1000 = 1159'27€$$

1. Calcula a cuánto ascenderán los intereses que producirán 4000 € colocados al 6 % de interés compuesto anual durante 1, 2 y 7 años.
2. Un inversor dispone de 35000 € y ha encontrado una sociedad que le garantiza un 5 % compuesto anual. ¿Qué intereses podría conseguir si lo invierte durante 3 años? ¿Y si lo deja durante 5 años?
3. Lucía invirtió 1000 € y después de 6 años retiró 1771'56 €. ¿A qué interés compuesto anual invirtió su dinero?
4. Calcula el capital que se conseguirá en una operación financiera en la que se ingresan durante 10 años 50000 € a un interés compuesto del 3'25 % anual.

5. ¿Cuánto dinero deberá invertir Ana al 3'7 % de interés compuesto para conseguir reunir 2000 € en 8 años?
  
6. Si Patricia va a invertir 15000 € a un interés compuesto de 3 % durante 4 años, ¿cuánto dinero tendrá al final de ese tiempo?
  
7. Clara quiere invertir durante 6 años a un interés compuesto del 2 % una cantidad de dinero para que tras esos años tenga 7000 €. ¿Cuánto dinero tendrá que invertir?
  
8. Jorge invirtió 6000 € y después de 8 años retiró 7000 €. ¿A qué interés compuesto anual invirtió su dinero?
  
9. Calcula el dinero que se conseguirá en una operación financiera en la que se ingresan durante 7 años 30000 € a un interés compuesto del 2'75 % anual.
  
10. Si Virginia va a invertir 25000 € a un interés compuesto de 6 % durante 8 años, ¿cuánto dinero tendrá al final de ese tiempo?

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS**

**FICHA 1: Definición de sucesión.**

**Definición:** Una **sucesión** de números reales es una secuencia ordenada de números.

**Ejemplos:** Las siguientes secuencias de números son sucesiones

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

1, 3, 5, 7, 11, 13, 15,

$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 6, \frac{7}{2}, \dots$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \dots$

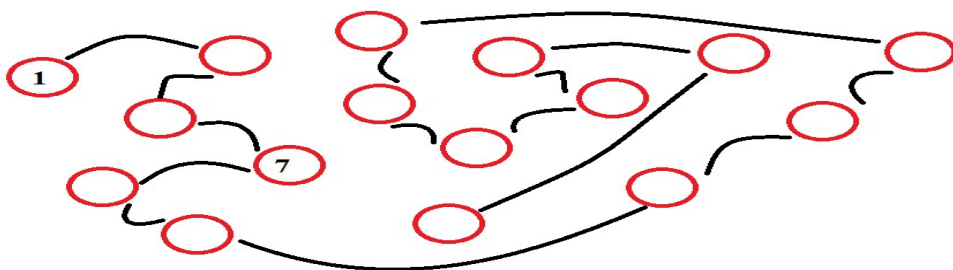
**Definición:** Se llama **término** de una sucesión a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión. Se suelen indicar con un “**subíndice**”, que indica la **posición que ocupa** el término en la sucesión.

**Ejemplos:**

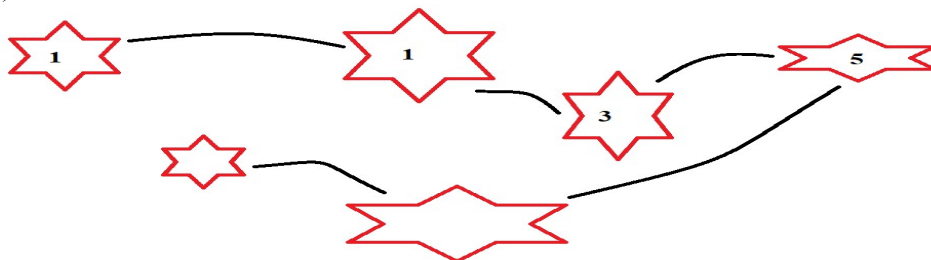
En las sucesiones anteriores  $a_2 = 2$ ;  $a_5 = 5$ ;  $b_1 = 1$ ;  $b_4 = 7$ ;  $c_3 = \frac{3}{2}$ ;  $c_7 = \frac{7}{2}$ ;  $d_4 = \frac{1}{16}$ ;  $d_8 = \frac{1}{256}$

1) Antes de empezar de forma “seria” con los ejercicios de la unidad, intenta completar los siguientes gráficos que nos recuerdan a los juegos que hacíamos en primaria:

a) Una muy facilita:



b) Prueba con ésta:



2) Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 2, 5, 8, 11, ...

b) 3, 6, 8, 9, 9, 8, 6,

c) 1, -1, 1, -1...

d) 2, 3, 4, 3, 6, 3, ...

e) 108, 54, 27,  $\frac{27}{2}$ , ...

f) 5, 8, 5, 8, 8,

g) 1, -2, 4, -8,

3) Encuentra el término \_\_\_ en las siguientes sucesiones:

a) 14, \_\_\_\_, 8, 5, 2, ...      b) 5, \_\_\_\_, 8; 5; 8; ...      c) 3, 8, \_\_\_\_, 18, ...

4) Halla los quince primeros términos de las siguientes famosas sucesiones:

a) Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5,

b) Sucesión de Padovan: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7

5) ¿Cuál es el siguiente número de la secuencia 0, 5, 4, 2, 9, 8, 6...? Pista: abecedario

6) ¿Cuál es el siguiente número de la secuencia 2, 10, 12, 16, 17, 18, 19...? Pista: d

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS****FICHA 2: Término general de una sucesión.**

**Definición:** Se llama **término general** de una sucesión, y se representa por  $a_n$ , a una expresión que nos permite obtener el valor de cualquier término en función de la posición que ocupa.

**Ejemplos:**

a) La expresión  $a_n = 3n + 1$  es el término general de la sucesión 4, 7, 10, 13, ... A partir de la fórmula se puede obtenerse, por ejemplo,  $a_{20} = 3 \cdot 20 + 1 = 59$

b) La sucesión de término general  $a_n = n^2 + 1$ :  $a_1 = 1^2 + 1 = 2$ ;  $a_2 = 2^2 + 1 = 5$ ; ...

**Existen varias formas de definir una sucesión:**

- Dando una propiedad que cumplan los términos de esa sucesión
- Dando su término general o término n-ésimo
- A partir de un término y alguna ley que permita obtener los siguientes por recurrencia.

1) Calcula los 5 primeros términos y el término  $a_{12}$  de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = 3n - 2$  →

b)  $a_n = n + 2$  →

c)  $a_n = -n + 3$  →

2) Calcula los 5 primeros términos y el término  $a_{15}$  de las siguientes sucesiones:

a)  $a_n = (n - 3)^2$  →

b)  $a_n = (-1)^n$  →

c)  $a_n = 2 \cdot 3^n \longrightarrow$

d)  $a_n = \frac{n+1}{n-2} \longrightarrow$

e)  $a_n = \frac{1}{2^n} \longrightarrow$

f)  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow$

3) Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones que cumplen la siguiente propiedad:

a) Sucesión de los números pares:

b) Sucesión de los números impares:

c) Sucesión de los números primos:

d) Sucesión de los números que terminan en 3:

e) Sucesión de los cuadrados de los números:

f) Sucesión de los números múltiplos de 7:

4) Escribe los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones, definidas a partir de una ley de recurrencia.

¿Qué sucede si quieres calcular el término  $a_{13}$  de estas sucesiones?:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -2$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 7$$

$$a_{n+3} = a_n$$

$$a_n = n^2$$

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + n$$

$$a_1 = 2$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 1$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS****FICHA 3: Progresiones aritméticas. Definición.**

**Definición:** Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene sumando una cantidad constante, llamada **diferencia (d)**, al término anterior.

Es decir,  $a_n - a_{n-1} = d$

**Ejemplo:**

a) La sucesión de números pares 2, 4, 6, 8, ... es una progresión aritmética donde  $a_1 = 2$  y  $d = 2$

b) La sucesión 1, 4, 7, 10, ... es una progresión aritmética con  $a_1 = 1$  y  $d = 3$

c) La sucesión  $4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, 2, \dots$  es una progresión aritmética con  $a_1 = 4$  y  $d = -\frac{1}{2}$

d) Si  $a_1 = 3$  y  $d = 2$ , los primeros cinco términos de la progresión aritmética son:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5 \quad a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7 \quad a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9 \quad a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$$

- 1) Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es  $-3$ .
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- 2) Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los dos primeros términos de una progresión aritmética son 8 y 13.

- 3) Si primer término de una progresión aritmética es 4 y la diferencia es 2, ¿cuáles son los siguientes 5 primeros términos? Calcula los términos  $a_{15}$  y  $a_{21}$
- 4) Calcula la diferencia y el primer término de una progresión aritmética sabiendo que  $a_4 = 7$  y  $a_6 = 10$ .
- 5) Hallar el término  $a_{10}$  en una progresión aritmética en la que  $a_1 = 5$  y la diferencia es  $d = -3$ .
- 6) El término general de una progresión aritmética es  $a_n = 3n - 1$ . Escribe los siete primeros términos de la progresión y calcula la diferencia.
- 7) Calcula el primer término de una progresión aritmética que consta de 10 términos, si se sabe que el último es 34 y la  $d = 3$ .
- 8) Sabiendo que son términos de progresiones aritméticas, interpola:

a) Cuatro términos entre 7 y 17	b) Cinco términos entre 32 y 14
c) Seis términos entre -18 y 17	e) Siete términos entre -12 y 12

9) Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, calcula la diferencia.

a) 3, 9, 27, 81, ...	b) 4, 8, 12, 16, ...
c) 1, -1, 1, -1, ...	d) 3, 1, -1, ...
e) 1, 2, 3, 4, ...	f) 2, 5, 16, 65, ...
g) 1, 3, 5, 7, ...	h) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS****FICHA 4: Progresiones aritméticas. Cálculo del término general.**

Al igual que ocurre con todas las sucesiones, las progresiones aritméticas quedan definidas por su término general. Calculemos la forma en que se expresa el término general de cualquier progresión aritmética conociendo el término  $a_1$  y la diferencia ( $d$ ):

Dado  $a_1$ , sabemos que:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d$$

.....

De forma general:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2) \cdot d + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Por tanto, el **término general de una progresión aritmética** es:  **$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$**

- 1) El término general de una progresión aritmética sabiendo que  $a_1 = 3$  y  $d = 4$ .
  
- 2) Halla el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es 6 y su diferencia es 6.
  
- 3) Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

$$d = 2,5 \text{ y } a_1 = 0$$

$$d = -2,5 \text{ y } a_1 = 1$$

$d = 1/3$ y $a_3 = 5$	$d = 3$ y $a_5 = 1$
De diferencia $d = -3$ y de segundo término 1.	De diferencia $d = -1$ y de tercer término $-4$ .

- 4) Halla los diez primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que  $a_5$  es 14 y la diferencia es 5.
- 5) El quinto término de una progresión aritmética es 21 y la diferencia es 4. Calcula  $a_{20}$ .
- 6) En una progresión aritmética el término  $a_3$  vale 0 y la diferencia es 2. calcula el término  $a_5$ .
- 7) El primer término de una progresión aritmética es  $-7$  y la diferencia es 2. Halla los cinco primeros términos de esa progresión.

- 8) El primer término de una progresión aritmética es 9 y la diferencia es 2. ¿Cuál es el término  $a_{16}$ ?
- 9) El primer término de una progresión aritmética es 5 y la diferencia es  $-5$ . ¿Cuál es el término  $a_{11}$ ?
- 10) De una progresión aritmética se sabe que  $a_2 = 9$  y  $d = 3$ . Halla los cinco primeros términos de la progresión.
- 11) El término  $a_9$  de una progresión aritmética es 21 y la diferencia es 5. Halla el término  $a_2$ .
- 12) Halla el primer término de una progresión aritmética sabiendo que  $a_{11} = -4$  y  $d = 2$ .

- 13) Calcula el término que ocupa el lugar 15 en una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y la diferencia es 3.
- 14) Calcula el primer término de una progresión aritmética con  $a_5 = 6$  y  $d = -2$ .
- 15) Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y  $a_{20} = 60$ .
- 16) Calcula el primer término y el término general de una progresión aritmética cuya diferencia es 82 y el  $a_{13} = 924$
- 17) Sabiendo que los términos  $a_7 = 11$  y  $a_{12} = 21$  de una progresión aritmética, calcula la diferencia y el término general.

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS****FICHA 5: Progresiones aritméticas. Suma de n términos.**

La **suma de n términos** de una progresión aritmética es:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Y de la misma forma, esa suma será:  $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$

Así pues, tenemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

---


$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_{n-2} + a_3) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Pero:  $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$

Y, en general, si los subíndices son p, q, r, s, se cumple que si  $p + q = r + s$ , entonces:

$$a_p + a_q = a_r + a_s$$

$$\Rightarrow 2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

La **suma** de los  $n$  primeros términos de una **progresión aritmética** es:  $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

**Ejemplo:** Calcula la suma de los todos los números de 1 a 100:

1, 2, 3, 4, 5, ... es una progresión aritmética donde  $a_1 = 1$ ,  $n = 100$  y  $a_{100} = 100$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

1) Calcula la suma los 20 primeros términos de la progresión aritmética 17, 13, 9, 5, 1, ...

2) Calcula la suma de todos los números pares menores o iguales a 800.



- 9) Halla la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética  $a_n = \frac{3n+1}{2}$
- 10) Dada la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, ... cuántos términos debemos tomar para que la suma de los n primeros términos sea 104.
- 11) Dada la progresión aritmética 7, 5, 3, 1, ... cuántos términos debemos tomar para que la suma de los n primeros términos sea -105.
- 12) Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es 15 y la diferencia es 3.
- 13) Calcula la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es 15 y la diferencia es -3.
- 14) Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión aritmética  $a_n = \frac{n+1}{2} + 1$ .

- 15) Calcula la suma de los términos que están entre el puesto 51 y 93 de la progresión aritmética  $a_n = n + 3$ .
- 16) Los primeros términos de una progresión aritmética son  $a_1 = 4$  y  $a_2 = 7$ . Calcula  $a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21}$
- 17) Dada la progresión aritmética  $a_n = 3n - 5$ , calcula  $a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{26} + a_{27}$
- 18) La suma de  $n$  números naturales consecutivos tomados a partir de 35 es 1820. Calcular  $n$ .
- 19) ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 es preciso tomar para que su suma sea igual a 1521?.

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS****FICHA 6: Progresiones geométricas. Definición y término general.**

**Definición:** Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior por un número fijo,  $r$ , llamado **razón**.

$$\text{Es decir, } a_{n+1} = a_n \cdot r$$

**Ejemplo:** La sucesión 1, 2, 4, 8, 16, ... es una progresión geométrica con  $a_1 = 1$  y  $r = 2$ .

El **término general de una progresión geométrica** cuyo primer término es  $a_1$  y razón  $r$  se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1} \\ \text{Por lo tanto: } a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

**Observaciones:**

Si  $r > 1$ , y el primer término es positivo, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores.

Si  $0 < r < 1$ , y el primer término es positivo, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores.

Si  $r < 0$ , la progresión es alternada, es decir, sus términos van cambiando de signo según el valor de  $n$ .

Si  $r = 0$ , la progresión está formada por ceros a partir del segundo término.

1) Calcula los tres primeros términos de cada una de las progresiones geométricas siguientes:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n = 2^{n+1}$$

$$a_n = (-3) \cdot 2^n$$

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n = (-1) \cdot 3^{n+2}$$

$$a_n = (-3)^n$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$a_n = (-5) \cdot 3^{1-n}$$

2) Calcula la razón de las siguientes progresiones geométricas:

a) 1, 2, 4, 8, 16, ...

b) 8, 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ , ...

c) 3, 9, 27, 81, ...

d) -3, 3, -3, 3, ...

e) 9, 3, 1,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ , ...

f) 5, -5, 5, -5, 5, ...

g)  $\frac{8}{27}$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $\frac{2}{3}$ , 1, ...

h) 3,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{9}{4}$ ,  $\frac{27}{8}$ , ...

h)  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{8}{9}$ , ...

- 3) Prueba cuales de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no. Y de las que sean calcula su razón.

a) 5,  $5/3$ ,  $5/9$ ,  $5/27$ ,...

b) 3, 12, 60, ...

c) 54, 36, 24, 16, ...

- 4) Hallar el octavo término de la progresión geométrica 2, 4, 8, ... De la misma progresión, calcula el término vigésimo.

- 5) Determinar los cinco primeros términos de una progresión geométrica si los dos primeros valen 7 y 3, respectivamente.

- 6) Sabiendo que  $a_1 = 4$  y  $a_2 = 12$  son dos términos de una progresión geométrica, calcula la razón y el término general. Calcula los términos  $a_3$ ,  $a_7$  y  $a_8$ .

- 7) Calcula la razón de una progresión geométrica donde el primer término es 5 y el quinto es 405.

8) Conocemos los términos  $a_3 = -8$  y  $a_{11} = -2.048$  de una progresión geométrica. Calcula su razón y su término general.

9) En una progresión geométrica  $a_2 = 5$  y la razón 3. Halla el lugar que ocupa el término que vale  $10^9 35$ .

10) Hallar el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es 5 y su razón es 7.

11) Calcula el término que ocupa el lugar 5 en una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y razón 3.

12) Calcula el primer término de una progresión geométrica con  $a_3 = 6$  y  $r = -2$ .

- 13) Sabemos que,  $a_2 = 10$  y  $a_{10} = 5120$  son términos de una progresión geométrica. Hallar el término general y  $a_7$ .
- 14) A Luís y Candelas, a las nueve de la mañana, les han contado un secreto. A los quince minutos, cada uno de ellos ha contado el secreto a dos amigos. Quince minutos más tarde, cada uno de ellos se lo ha contado a otros dos amigos que, a su vez, se lo volvieron a contar a otros dos amigos. Pasadas cuatro horas, ¿cuánta gente conocía el secreto?
- 15) Un coche se compró nuevo por 41.920 € que, al cabo de unos años se vendió a la mitad de precio. Pasados unos años se volvió a vender por la mitad, y así sucesivamente. ¿Cuánto le costó el coche al quinto propietario?
- 16) Si en un cuadrado  $256 \text{ m}^2$  de área se unen los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado (girado), dentro del cual se unen los puntos medios de sus lados y así hasta repetir el proceso 7 veces. ¿Qué tipo de progresión es? Calcula el término general.

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS****FICHA 7: Progresiones geométricas. Suma de n términos.**

Dada una progresión geométrica con  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ , calculemos la suma de los primeros n términos de la sucesión:  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por r:

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \dots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

Pero:

$$a_2 = r \cdot a_1$$

$$a_3 = r \cdot a_2$$

$$a_4 = r \cdot a_3$$

...

$$a_n = r \cdot a_{n-1}$$

La igualdad anterior queda:

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + r \cdot a_n$$

Restando  $r \cdot S_n - S_n$

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + r \cdot a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

---


$$r \cdot S_n - S_n = r \cdot a_n - a_1$$

$$r \cdot S_n - S_n = r \cdot a_n - a_1$$

Sacando factor común en el primer miembro de la igualdad:  $(r - 1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1$

Pero como  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$(r - 1) \cdot S_n = r \cdot a_1 \cdot r^{n-1} - a_1 = a_1 \cdot r^n - a_1 = a_1 \cdot (r^n - 1)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

1) Calcula la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n = 2^{n+1}$$

$$a_n = (-3) \cdot 2^n$$

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2) Calcula la suma de los 9 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a)  $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

b)  $-3, 3, -3, 3, \dots$

c)  $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \dots$

d)  $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \dots$

e)  $3, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \dots$

f)  $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

3) Hallar la suma de los 11 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es  $-2$  y la razón  $-3$ .

4) Calcula la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica  $5, -5, 5, -5, 5, \dots$

- 5) Calcula la suma de los 11 primeros términos de la progresión geométrica  $5, -5, 5, -5, 5, \dots$
- 6) Hallar la suma de los 7 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el séptimo término es 20 480, el primero es 5 y la razón es 4.
- 7) Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que  $a_1 = 5$  y  $r = 0,5$ .
- 8) Halla la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica: 3, 6, 12, 24...
- 9) Un agricultor en su granja tiene 59 049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizó la mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?
- 10) Si en un cuadrado  $256 \text{ m}^2$  de área se unen los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado (girado), dentro del cual se unen los puntos medios de sus lados y así indefinidamente. ¿Qué tipo de progresión es? Calcula la suma de las áreas de los 7 primeros cuadrados formados.

**UNIDAD DIDÁCTICA 5: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS****FICHA 8: Progresiones geométricas. Suma de todos los términos.**

La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica se obtiene mediante la fórmula estudiada en la ficha anterior:  $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$ .

**¿Podríamos calcular la suma de todos los términos de una progresión geométrica?**

**Tenemos las siguientes situaciones dependiendo del valor de la razón,  $r$ :**

a) Si  $r = 1$ , estamos ante la progresión constante formada por el primer término:  $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \dots\}$  y si  $a_1$  es positivo la suma de los términos será cada vez mayor (si fuera  $a_1$  negativo sería la suma cada vez mayor en valor absoluto, pero negativa). Por tanto, si el número de términos es ilimitado, esta suma será infinita.

b) Si  $|r| > 1$ , los términos en valor absoluto crecen indefinidamente por lo que sumáramos números cada vez más grandes y, por tanto, la suma será infinita.

c) Si  $|r| < 1$ , la suma de sus términos cuando  $n$  es grande se aproxima a  $\frac{1}{1-r}$  ya que si en  $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$  elevamos  $r$  a una potencia cada vez mayor, siendo  $|r| < 1$ , el valor de  $r^n$  se irá aproximando a 0.

De esta forma, la suma se irá aproximando a:  $S_n = \frac{a_1(0-1)}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$

d) Si  $r = -1$ , los términos consecutivos son opuestos:  $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots\}$  y  $S_n$  es igual a cero si  $n$  es par, e igual a  $a_1$  si  $n$  es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores.

1) Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica cuyo primer término es 3 y  $r = 1/2$ .

2) Calcula la suma de todos los términos de la sucesión: 20, 2, 0'2, 0'02, 0'002, ...

- 3) Calcula la suma de todos los términos de una progresión geométrica tal que  $a_3 = 6$  y  $r = 0,5$
- 4) En una progresión geométrica la razón es  $1/4$  y la suma de todos sus términos es 8. ¿Cuánto vale el primer término?
- 5) Calcula, siempre que puedas, la suma de todos los términos de las siguientes progresiones geométricas:

$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$	e) $3, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \dots$
c) $\frac{8}{27}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \dots$	f) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
d) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \dots$	$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$
$a_n = (-1) \cdot 3^{n+2}$	$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

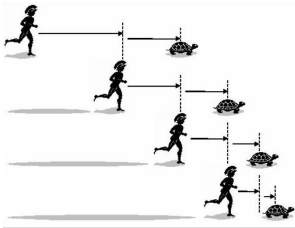
$a_n = (-1)^n$	$a_n = 2 \cdot \frac{1}{3^n}$
$a_n = (-3)^n$	$a_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$
$a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$a_n = (-5) \cdot 3^{1-n}$

6) Se forma una sucesión de círculos concéntricos en los que cada radio es la mitad del radio del círculo anterior. Si el primer círculo tiene un diámetro de 4 cm, halla la suma de las áreas de todos los círculos.

7) Una rana da saltos en línea recta hacia delante, y cada vez salta los  $\frac{2}{3}$  del salto anterior. Quiere atravesar un río de 5 m de ancho. Su primer salto es de 2 m. ¿Pasará por el centro de la charca? ¿Llegará al otro lado de la charca?

- 8) Si en un cuadrado  $256 \text{ m}^2$  de área se unen los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado (girado), dentro del cual se unen los puntos medios de sus lados y así indefinidamente. ¿Qué tipo de progresión es? Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados formados.

9) Paradoja de Zenón



“En una carrera, el corredor más rápido (Aquiles) nunca puede adelantar a la más lenta (la tortuga), ya que el perseguidor debe alcanzar primero el punto de donde comenzó el perseguido, de modo que el más lento debe llevar siempre una ventaja”

**Ejemplo práctico:** Supongamos que, en una carrera sin final entre Aquiles y la tortuga, por cada 10 m que avanza Aquiles la tortuga avanza 1 m.

Aquiles deja 100 metros de ventaja a la tortuga. Según la Paradoja de Zenón, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. ¿Es esto cierto?

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA****FICHA 1: Monomios y polinomios. Grado y valor numérico.**

**Definición:** Un monomio es una expresión algebraica formada por:

- una parte numérica, llamada coeficiente.
- una parte literal, formada por letras y sus exponentes.

**Definición:** El grado de un monomio es la suma de los exponentes de las letras que lo forman:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
5 x	5	x	1
6 am <sup>2</sup>	6	am <sup>2</sup>	3

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal:

$6a^2b^2$  y  $-5a^2b^2$  son semejantes

$5x^2y$  y  $5xy$  no son semejantes

1. Indica la parte literal, los coeficientes y el grado de los siguientes monomios:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-5a^2bx$			
$7xyz^5$			
$\frac{2}{3}x^2z$			
$\sqrt{5}xm^2$			
$-ab^2$			
$0,5a^2b^2c$			
	-6	$x^5z^3$	
	3,7	$mp^2o$	
10			
	$-\frac{5}{3}$	$xy^3z^4$	
$-\frac{7}{5}xy^3z^8$			
$2a^2bc$			

**Definición:** Un polinomio es la suma de dos o más monomios no semejantes.

Cuando son polinomios con una única variable se emplea la letra  $x$  y se suelen representar como  $P(x)$ ,  $Q(x)$ .....

Los elementos de un polinomio son:

- Términos: Cada uno de los monomios que lo componen.
- Coeficientes: Los números que multiplican a la parte literal o variable.
- Término independiente: Monomio de grado cero (número).
- Grado del polinomio: El mayor grado de los monomios que lo forman

Un polinomio es completo si consta de términos de todos los grados, desde el término independiente hasta el término de mayor grado

2. Completa la siguiente tabla.

Polinomio	Grado	Término independiente	Completo
$16x^6 - 2x^4 + 5x^3 - 10$	6	-10	n
$-2x^5 - 7x^3 + 8x$			
$2x^2 + 3x^3 + 2 - 3x$			
$3x^2 - 2x - 1$			
$-\frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{1}{5}$			

**El valor numérico de un polinomio es el resultado de sustituir las variables por determinados números y realizar las operaciones indicadas**

3. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios

a) $2x + 1$ , para $x = 1$	
b) $2x^2 - 3x + 2$ , para $x = -1$	
c) $x^3 + x^2 + x + 2$ , para $x = -2$	
d) $2x^2 - 5x + 1$ , para $x = \frac{1}{2}$	
e) $2x^3 - 5x^2 + 3$ para $x = 2$	

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA**

**FICHA 2: Raíces de polinomios. Regla de Ruffini**

Las raíces o ceros de un polinomio son los valores que anulan el polinomio, por lo tanto, su valor numérico es cero. Es decir,  $x = a$  es una raíz de  $P(x)$  si  $P(a) = 0$ .

Las posibles raíces de un polinomio son los divisores del término independiente.

A la raíz  $x = a$  le corresponde un binomio  $(x-a)$ .

**Ejemplo:**

Dado  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$

$P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 - 1 = 0$  ;  $x = 1$  es una raíz de  $P(x)$ ;  $(x-1)$  es un factor de  $P(x)$

$P(-1) = 3(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 1 = -6$  ;  $x = -1$  no es una raíz de  $P(x)$

4. Indica si los siguientes valores son raíces de los polinomios

	$x = 1$	$x = -1$
$P(x) = 2x + 2$		
$P(x) = 2x^2 - 3x + 1$		
$P(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$		
$P(x) = 2x^2 - 5x + 3$		

**La Regla de Ruffini** es un método práctico para calcular las raíces de un polinomio.

Se colocan los coeficientes del polinomio de mayor a menor grado, si algún grado no aparece se pone un 0.

Se va probando con los divisores del termino independiente hasta que en la última casilla aparezca un 0

**Ejemplo**  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -2 & 0 & -1 \\
 1 & & 3 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 3 & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

En este caso  $x = 1$  es una raíz del polinomio

La regla de Ruffini también se utiliza para saber si un polinomio es divisible entre  $(x-a)$

En el ejemplo anterior diremos que  $P(x)$  es divisible entre  $(x-1)$

5. Busca las raíces de los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini

a.  $P(x) = 3x^3 + x^2 - 6x + 1$

b.  $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

c.  $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 24x + 72$

d.  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

e.  $P(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA**

**FICHA 3: Descomposición en factores de un polinomio.**

Descomponer en factores un polinomio es expresarlo como producto de polinomios del menor grado posible. Como método, es práctico ir aplicando la regla de Ruffini sucesivamente hasta que no se puedan calcular más raíces.

Ejemplo: Factoriza el polinomio  $P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

Las raíces enteras de  $P(x)$  son los divisores de 8, que son  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ .

	1	1	-6	-4	8
1		1	2	-4	-8
	1	2	-4	-8	0
2		2	8	8	
	1	4	4	0	
-2		-2	-4		
	1	2	0		
-2		-2			
	1	0			

Por lo tanto, las raíces de  $P(x)$  son 1, 2 y la raíz doble -2.

Y  $P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)^2$

1. Factoriza los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini

- a.  $P(x) = 3x^3 + x^2 - 6x + 1$
- b.  $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
- c.  $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 24x + 72$
- d.  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$
- e.  $P(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA****FICHA 4: Suma y resta de polinomios.**

Para sumar dos polinomios se suman los monomios semejantes y se dejan indicados los monomios que no lo sean.

El opuesto de un polinomio  $P(x)$  denotado por  $-P(x)$  es otro polinomio cuyos coeficientes son los opuestos del polinomio dado.

Para restar dos polinomios sumamos al primero el opuesto del segundo.

1) Siendo  $P(x) = 3x^3 - x^2 + 2x$ ,  $Q(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 4$ , calcula:

a)  $P(x) + Q(x) =$

b)  $P(x) - Q(x) =$

c)  $-P(x) + Q(x) =$

d)  $-P(x) - Q(x) =$

2) Siendo  $P(y) = 2y^2 - 3y^2 + 4y - 5$ ,  $Q(y) = -y^3 + 2y^2 - 2y + 4$  y  $R(y) = y^3 + y^2 - 6y + 2$ , calcula:

a)  $P(y) + Q(y) + R(y) =$

$$\text{b) } P(y) + [Q(y) - R(y)] =$$

$$\text{c) } P(y) - Q(y) + R(y) =$$

$$\text{d) } P(y) - [Q(y) - R(y)] =$$

$$\text{e) } Q(y) - R(y) - P(y) =$$

$$\text{f) } Q(y) - [R(y) + P(y)] =$$

3) ¿Qué polinomio hay que sumar al polinomio  $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  para que su suma sea  $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ ?

4) Dados los polinomios

$$P(x) = -3x^4 - 5x^2 + 1$$

$$Q(x) = x^3 - 6x + 3$$

$$R(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 6$$

$$S(x) = -x^3 + 6x + 4, \text{ calcula:}$$

$$\text{a) } [P(x) + Q(x)] - [R(x) + S(x)] =$$

$$\text{b) } [P(x) + S(x)] - [Q(x) + R(x)] =$$

$$\text{c) } [Q(x) - S(x)] - [P(x) - Q(x)] =$$

$$\text{d) } [S(x) - Q(x)] + [P(x) - R(x)] =$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA****FICHA 5: Multiplicación de polinomios.**

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por cada uno de los monomios y se suman los términos semejantes.

$$(5x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 3) = 5x^3 - 10x^2 + 15x - 3x^2 + 6x - 9 = 5x^3 - 13x^2 + 21x - 9.$$

O bien:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 3 \\ 5x - 3 \\ \hline -3x^2 + 6x - 9 \\ \hline 5x^3 - 10x^2 + 15x \\ \hline 5x^3 - 13x^2 + 21x - 9 \end{array}$$

1. Halla el producto  $P(x) \cdot Q(x)$  para cada uno de los siguientes casos:

$P(x) = 3x^2 + 2x - 3$ $Q(x) = x - 2$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $Q(x) = x^2 - 1$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3$ $Q(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 3x$	$P(x) \cdot Q(x) =$

$P(x) = -2x^4 + 3x^2 + 4x - 3$ $Q(x) = -x^2 - 3x + 4$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = 3x^3 - 2x + 4$ $Q(x) = -2x + 3$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 7$ $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 1$	$P(x) \cdot Q(x) =$
$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ $P(x) = 6x^3 + 4x^2 - 3x + 4$	$P(x) \cdot Q(x) =$

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA**

**FICHA 6: División de polinomios.**

Para dividir dos polinomios se ordenan en sentido decreciente el dividendo y el divisor. Si el dividendo no es completo dejaremos huecos o ceros en los términos que falten.

Dividimos el primer término de dividendo entre el primer término del divisor punto luego multiplicamos el término del cociente así obtenido por todo el divisor y restamos el producto resultante del dividendo con lo cual tenemos el primer dividendo parcial.

Se realiza con este dividendo parcial las mismas operaciones y seguimos así hasta obtener resto cero o hasta llegar a un dividendo parcial de grado menor que el divisor.

Notad que se cumple que  $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$  y que, el grado del cociente es el grado del dividendo menos el grado del divisor:  $\text{Grado } c(x) = \text{Grado } D(x) - \text{Grado } d(x)$

Ejemplo:  $(6x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 8x - 3) : (2x^2 + 3x - 1)$

$$\begin{array}{r}
 6x^4 \quad +7x^3 \quad -2x^2 \quad +8x \quad -3 \quad \Big| \quad 2x^2 \quad +3x \quad -1 \\
 -6x^4 \quad -9x^3 \quad +3x^2 \quad \phantom{+8x} \quad \phantom{-3} \quad \phantom{-1} \\
 \hline
 \phantom{6x^4} \quad -2x^3 \quad +x^2 \quad +8x \quad \phantom{-3} \quad \phantom{-1} \\
 \phantom{6x^4} \quad +2x^3 \quad +3x^2 \quad -x \quad -3 \quad \phantom{-1} \\
 \hline
 \phantom{6x^4} \phantom{+2x^3} \quad 4x^2 \quad +7x \quad -3 \quad \phantom{-1} \\
 \phantom{6x^4} \phantom{+2x^3} \quad -4x^2 \quad -6x \quad +2 \quad \phantom{-1} \\
 \hline
 \phantom{6x^4} \phantom{+2x^3} \phantom{+4x^2} \quad x \quad -1 \quad \phantom{-1}
 \end{array}$$

1. Halla cociente  $P(x) : Q(x)$  para cada uno de los siguientes casos:

$P(x) = 3x^2 + 2x - 3$ $Q(x) = x - 2$	
$P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $Q(x) = x^2 - 1$	

$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3$ $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$	
$P(x) = -2x^4 + 3x^2 + 4x - 3$ $Q(x) = -x^2 - 3x + 4$	
$P(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 5$ $Q(x) = x^2 + 3x$	
$P(x) = 8x^5 + 1$ $Q(x) = 2x^3 - 1$	

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA****FICHA 7: Fracciones algebraicas. Simplificación.**

Una fracción algebraica es un cociente indicado de dos polinomios:  $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Para simplificarlas se factorizan el numerador y el denominador y se eliminan los factores que aparezcan repetidos.

Ejemplo:  $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$

1. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x}$	
$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$	
$\frac{2x^3 + 10x^2 + 16x + 8}{4x^3 + 8x^2 - 4x - 8}$	
$\frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^3 + 3x^2 - 16x - 48}$	

**UNIDAD DIDÁCTICA 6: ÁLGEBRA****FICHA 8: Fracciones algebraicas. Suma y resta**

**Si tienen el mismo denominador:** La suma o resta de fracciones algebraicas es otra fracción algebraica con el mismo denominador que los sumandos y con denominador la suma de los numeradores, siempre que se pueda haber que simplificar.

$$\frac{x}{x-8} + \frac{2}{x-8} = \frac{x+2}{x-8}$$

**Si no tuvieran el mismo denominador** habría transformarlas en otras fracciones algebraicas equivalentes con el mismo denominador. Calculando el m.c.m. de los denominadores de las fracciones iniciales.

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x(x-3) + 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - x - 4}{(x-2)(x-3)}$$

1. Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} =$$

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x} =$$

$$\frac{2x+4}{x+4} - \frac{2x-14}{x-5} =$$

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{2+x}{x^2-4x+4} =$$

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x-1}{x}$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x}{1-x} + \frac{x}{x^2-3x+2}$$

$$\frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30} + \frac{1}{x^2-10x+24}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES****FICHA 1: Ecuaciones de primer grado sencillas y con paréntesis.**

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

A la letra o letras que intervienen en la ecuación se les denomina incógnitas.

La solución de la ecuación será el valor o valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad, por lo tanto, resolver una ecuación es encontrar dichos valores.

**RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO:**

Para resolver ecuaciones de primer grado debes seguir los siguientes pasos:

- **Trasposición de términos:** Pasamos todas las “x” a un lado y lo que no tiene “x” al otro lado de la igualdad según la **REGLA DE LA SUMA** (lo que suma en un miembro pasa restando al otro miembro y viceversa)
- **Reducimos términos:** Sumamos en cada miembro los monomios semejantes.
- **Despejamos la “x”** según la **REGLA DEL PRODUCTO**: lo que está multiplicado en un miembro pasa dividiendo al otro miembro y viceversa.

**CASOS ESPECIALES**

- $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
- $0x = 0 \Rightarrow$  Infinitas soluciones.
- $0x = A \Rightarrow$  No tiene solución.

1. Resuelve paso a paso:

$2x - 4 = 3 + x$	$5x - 4 - 4x = 2x - 3 + 3x$	$3x + 5 = 2x - 2$
$2x - 3 + 5x = x - 1 - 2x$	$4x - 8 + 3x = 5x + 10 - 4x$	$x + 2 - 6x = x - 9 + 5x$

$2 - 3x + 5 = x - 5 - 7x$	$x = 2x - 3 + 3x$	$x - 2 - 6x = x - 7 + 5x$
$2x - 3 = x - 3 + x$	$2x - 3 = x + 3 + x$	$2x - 3 = x - 3$
$5x - 2 + 3x = 4 - 2x + 1$	$-2x + 1 - 2x = 6 + 3x - 4$	$x + 3 - 3x = -x - 2 + 2$
$2x - 7 + 3x = -8x + 8 - 9$	$12x + 3 = 6 + 3x - 7 - 4 - 5x$	$8x - 9 - 6 + 5x + 3x = 1$

**Cuando la ecuación tenga paréntesis debemos aplicar la propiedad distributiva:**

**Ejemplo:**  $2 \cdot (3x - 2) = 8$

$$6x - 4 = 8$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

**Si delante del paréntesis tenemos un signo negativo, dicho signo afecta a todos los términos que hay dentro del paréntesis.**

**Ejemplo:**  $2 - (3x - 2) = 8$

$$2 - 3x + 2 = 8$$

$$3x = 8 - 2 - 2$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

$$9 - 3 \cdot (2x - 1) = 0$$

$$3 \cdot (4x + 3) = 4x + 15$$

$$3 \cdot (4 - x) = 18x + 5$$

$$x - 3 \cdot (2x - 6) = 3$$

$$12x - 4 \cdot (x - 3) - 3x = 3(3x - 1) + 3$$

$$-2 \cdot (2x - 1) + 21 = 5(2x - 2) + 9$$

$10 - 5(3x + 7) - (2x - 3) = -4x - 4(1 + x)$	$x - 2 \cdot (2 - 3x) = 17$
$7(5x - 3) - 9x = -(-3x - 8) + 3(5x + 1)$	$5x + 3(2x - 3) = 8 - 4(5 - 2x) + 2x$
$7 - 6(4x - 2) + 5x = 8x - 2(1 + 3x)$	$2x - 2 \cdot (2x - 5) = x - 1$
$6 \cdot (x - 2) + 5x = 4(x - 3)$	$3x - 4 + x = 2(x + 6)$

$2(x-3) = -x+3$	$2 \cdot (2x+1) = -(x+3)+3$
$12 - (4x-6) = 5x$	$-2 \cdot (x+6) + 2 = -4 - (10-2x)$
$3 \cdot (2x-5) + x = -3(x-3) - (x+1)$	$2 \cdot (2x+5) - 5 = 5x + 2 \cdot (4-x) + 1$
$2 \cdot (3x-1) - x = -2(x-1) - 3(x+1)$	$4 \cdot (x-2) + 10 = 3x + 2(4-x) + 2$

$-5(x+1) - (x-2) = -4(x+1) - 3x$	$2x+3 - 5(x-4) = -5(3x+5) - 3(x+3)$
$5(-5x-4) = 5(x+4) + 3(3x-1)$	$5(-3x-1) + 2(5x-1) = -3(-2x-3) - 4(-5x-3)$
$-3(3x-5) - 3(-x+5) = 3(-2x-5) + 4(3x+1)$	$-3(2x-3) - 5(-x-5) = -4(5x+1)$
$-2(-x-2) - 4(5x+2) = 1 + 2(-5x+4)$	$0 = -4(-3x+4) - (-2x-2)$

**UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES****FICHA 2: Ecuaciones de primer grado con denominadores.**

Cuando la ecuación tenga denominadores podemos encontrarnos dos situaciones

- Si tenemos una única fracción o una igualdad de fracciones, aplicamos la equivalencia de fracciones.

Ejemplo:  $\frac{x+5}{2} = \frac{x-3}{5} \Rightarrow 5 \cdot (x+5) = 2 \cdot (x-3)$

- Si tenemos varias fracciones en ambos miembros reducimos a común denominador y podremos simplificar los denominadores.

Ejemplo:  $\frac{x+2}{2} + \frac{x}{4} = \frac{2x+1}{6}$       mcm (2,4,6) = 12

$$\frac{6(x+2)}{12} + \frac{3x}{12} = \frac{2(2x+1)}{12} \Rightarrow 6(x+2) + 3x = 2(2x+1)$$

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

$\frac{x-1}{5} = \frac{3}{2}$	$\frac{2x+1}{7} = \frac{5}{3}$
$\frac{x+1}{3} = \frac{3x-2}{2}$	$\frac{2x-7}{5} = \frac{5x+2}{3}$
$\frac{x+1}{3} = \frac{3x-2}{2}$	$\frac{2x-7}{5} = \frac{5x+2}{3}$

$$\frac{x+2}{3} = 5x - 4$$

$$\frac{x}{5} + 2 = x - 4 - \frac{x}{2}$$

$$\frac{3x}{2} + 20 = x + 25$$

$$\frac{x}{4} + 3 = 2x - \frac{3x}{2}$$

$$\frac{3x}{5} + 7 = 2x$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{11}{6}$$

$$x - \frac{3x}{4} + \frac{1}{10} = \frac{4x}{5} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{3x}{2} + 10 = 4x$$

$$\frac{x}{2} - 3 = x - 7$$

$$x + \frac{5x}{6} - 25 = 50 - \frac{x}{4}$$

$$3 + \frac{2x+1}{3} = 4x - \frac{2x-5}{6} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2x-3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2x+11}{10} - \frac{3x-1}{2}$$

$$2\left(\frac{x+5}{3}\right) = x - 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2x - 3) - x = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}(3x - 1) - \frac{5}{6} = \frac{x}{2}$$

$$4 - \frac{x+3}{6} = 2 + \frac{9-2x}{3}$$

$$\frac{3 \cdot (x+1)}{5} = \frac{2 \cdot (x-2) + 5}{3}$$

$$\frac{x}{2} - 2 \cdot (x-1) = \frac{3x}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{2x-3}{6} - 3x = \frac{2}{3} - \frac{3x-6}{6}$$

$$\frac{3x-7}{6} + \frac{2x-5}{9} = 1 - \frac{x+4}{2}$$

$$\frac{4x+5}{5} - \frac{6x-2}{3} = \frac{3x+4}{15}$$

$$\frac{3 \cdot (x-1)}{2} - 3x = \frac{13}{5} - 2 \cdot (x+2)$$

$$4 \cdot \frac{2x+10}{6} = 2x-4$$

$$\frac{2(x+5)}{3} - 2 + 3x = \frac{2x+11}{10}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES****FICHA 3: Problemas con edades.**

**Para resolver problemas con edades es importante:**

- **Detectar cual es la incógnita.**
- **“El tiempo pasa” implica sumar años a todos los individuos que intervienen en el enunciado.**

1. Un padre tiene 34 años, y su hijo, 12. ¿Al cabo de cuántos años la edad del padre será el doble que la del hijo?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Beatriz dice: si al doble de los años que tengo le restas la mitad de los que tenía hace un año, el resultado es 20. ¿Qué años tiene Beatriz?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. Antonio tiene ahora 8 años más que su primo pequeño, pero dentro de 4 años la edad de Luis será el doble de la de su primo. ¿Cuántos años tiene cada uno?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
4. María tiene 10 años más que su hermana. Dentro de 6 años tendrá el doble. ¿Qué edad tiene cada una?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
5. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo y dentro de 13 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

6. La edad de una madre es siete veces la de su hija. Si la madre es 24 años mayor que la hija. Averigua las edades de ambas.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
7. Un padre dice de la edad de su hijo: Las  $\frac{3}{4}$  partes de su edad hace tres años más el doble de la edad que tendrá dentro de 2 años es igual a mi edad que son 40 años.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
8. La edad de un padre es cuatro veces la de su hijo, pero dentro de 18 años sólo será el doble. ¿qué edad tiene el hijo en la actualidad?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
9. Jaime tiene 1 año más que Beatriz, que tiene el doble de edad que su hermano pequeño. Entre los tres tienen 26 años. Calcula la edad de cada uno.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
10. Las edades de dos niños suman 14 años. Y dentro de 2 años, uno tendrá la edad que el otro. ¿Cuál es la edad de cada uno de los niños?

**UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES****FICHA 4: Problemas de mezclas.**

Para resolver problemas de mezclas es conveniente ayudarnos de una tabla:

	Precio	Cantidad	Total = Precio x Cantidad
Mercancía 1			
Mercancía 2			
Mezcla			

Teniendo en cuenta que el total de la mezcla es igual a la suma de los totales de cada mercancía.

1. Qué cantidades de café, uno de 14 euros/kg y otro de 12 euros/kg, hay que mezclar para que resulten 25 kg de mezcla de café a 13'2 euros/kg?
2. Un ganadero quiere mezclar cierta cantidad de maíz de 2'8 euros el kilo, con 300 kilos de cebada de 2'2 euros el kilo, para obtener un pienso para gallinas que resulte a 2'6 euros el kilo. ¿Qué cantidad de maíz necesitamos?
3. “Se han mezclado dos clases de café de 3'05 €/kg y 5'7 €/kg resultando una mezcla de 8 kg y 4'55 €”.  
¿Cuántos kilos de cada café hay que mezclar?



**UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES****FICHA 5: Ecuaciones de segundo grado completas.**

Decimos que tenemos una ecuación de segundo grado cuando puede expresarse de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Para resolverlas aplicamos la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si llamamos discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  podemos encontrarnos tres situaciones:

$\Delta > 0$  la ecuación tiene dos soluciones reales

$\Delta = 0$  la ecuación tiene una solución real doble

$\Delta < 0$  la ecuación no tiene solución real

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones usando la fórmula anterior.

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

a =

b =

c =

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

a =

b =

c =

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

a =

b =

c =

$$x^2 + x - 2 = 0$$

a =

b =

c =

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$8x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$-6x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{3} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2}$$

$$\frac{x^2 - 1}{3} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2}$$

$$x \cdot (x + 1) - 4 = 3x - 1$$

$$x \left( 5x + \frac{9}{2} \right) = 4x \cdot (x + 1) + \frac{1}{2}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES****FICHA 6: Ecuaciones de segundo grado incompletas.**

Cuando la ecuación a la ecuación de segundo grado le falta algún término se denomina ecuación de segundo grado incompleta y no se resuelven aplicando la fórmula:

- Si  $c = 0$ , la ecuación se reduce a:  $ax^2 + bx = 0$ .

Podemos sacar factor común  $x$  y tenemos:  $x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$

Este tipo de ecuación siempre tiene dos soluciones.

- Si  $b = 0$  la ecuación se reduce a:  $ax^2 + c = 0$ .

Podemos despejar directamente  $x$ :  $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

Puede tener dos soluciones opuestas o ninguna solución, dependiendo de que el radicando sea o no positivo.

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

$x^2 = 36$	$3x^2 - 12 = 0$
$x^2 - 3x = 0$	$2x^2 = 32$
$2x^2 - 200 = 0$	$x^2 - 5x = 0$

$4x^2 = 36$	$x^2 - 15 = 66$
$49 - x^2 = 0$	$5x^2 = 80$
$2x^2 = 50$	$2x^2 - 6x = 0$
$5x^2 - x = 0$	$2x \cdot (x - 3) = 3 \cdot (x^2 + 2x)$



5. El precio de una camiseta es  $\frac{3}{4}$  del precio de una camisa y el producto de los precios de ambas prendas es de 972 euros. ¿Cuál es el precio de cada una?
6. Si se disminuye el lado de un cuadrado en 3 metros, su área disminuye en  $45 \text{ m}^2$ . ¿Cuánto mide el lado?
7. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su base mide 3 metros más que su altura y que su superficie es de  $54 \text{ m}^2$ .
8. El perímetro de un rectángulo es de 54 metros y su superficie es de  $180 \text{ m}^2$ . ¿Cuáles son sus dimensiones?

9. Halla la altura de un triángulo equilátero de lado 10 dm.

10. Un rectángulo tiene de diagonal 25 cm y de altura 15 cm. Averigua la base y el área.

11. Un triángulo isósceles tiene de base 8 cm y de altura 12 cm, Averigua el perímetro.

12. Un rombo tiene de diagonal 16 y 12 dm respectivamente. Averigua el lado, el perímetro y el área.

**UNIDAD DIDÁCTICA 7: ECUACIONES****FICHA 8: Ecuaciones bicuadradas.**

Decimos que tenemos una ecuación bicuadrada cuando puede expresarse de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Para resolverlas hacemos un cambio de variable  $x^2 = t$ ;  $x^4 = t^2$ , transformando la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado en la variable  $t$ :

$$at^2 + bt + c = 0$$

Esta ecuación la resolvemos aplicando la fórmula:  $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

**IMPORTANTE:** Tras calcular el valor de la variable “ $t$ ” hay que deshacer el cambio de variable y para calcular los valores de  $x$ .

1. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0$$

$$x^4 - 48x^2 - 49 = 0$$

$$3x^4 - 10x^2 - 8 = 0$$

$$2x^4 + 9x^2 - 68 = 0$$

$$24x^4 - 25x^2 = 0$$

$$(2x^2 + 1)^2 - 5 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$$

$$(x^2 + 1)^2 + 6 = 5(x^2 + 1)$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

**FICHA 1: Representación gráfica de funciones**

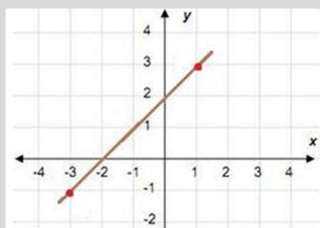
La expresión algebraica “ $y = mx + n$ ” es una “función lineal”, y se representa mediante una recta donde “ $m$ ” es la “pendiente” de la recta y “ $n$ ” es la “ordenada en el origen”.

Para representar “rectas”, damos valores a la variable “ $x$ ” y calculamos el valor de la variable “ $y$ ”.

Ejemplo:

$y = x + 2$

x	y
0	2
1	3
-1	1
-2	0
-3	-1



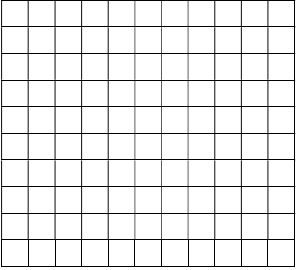
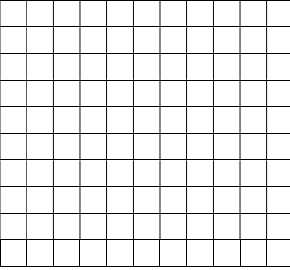
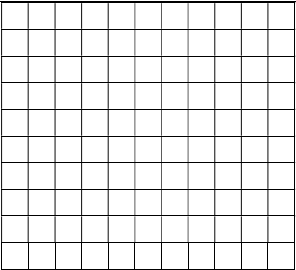
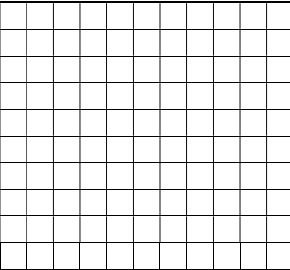
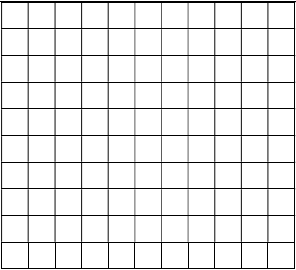
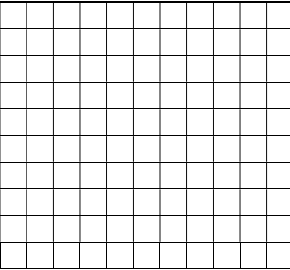
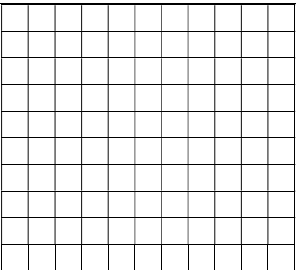
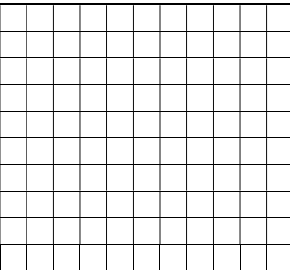
Si despejamos “ $y$ ” en la expresión “ $ax + by = c$ ”, tendremos que:  $y = \frac{c-ax}{b} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$

Si llamamos  $m = \frac{c}{b}$  y  $n = \frac{a}{b}$ , tendremos que “ $y = mx + n$ ” y por lo tanto se representa mediante una recta.

Así pues, un sistema de ecuaciones lineales de la forma  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  se representa mediante dos rectas. La solución de dicho sistema será el par de valores  $(x, y)$  que cumpla las dos ecuaciones a la vez y, por lo tanto, será el punto de corte de dichas rectas.

1. Representa las siguientes rectas sobre los ejes de coordenadas:

$y = 2x - 3$	$y = x + 4$
$y = \frac{3}{2}x - 1$	$y = \frac{2x - 1}{2}$

$y = 2 - \frac{x}{2}$ 	$5x + y = 1$ 
$2x - 3y = 4$ 	$x + 2y = -3$ 
$2(x+1) = y - 3$ 	$-(2x+2) = 5 - 3y$ 
$x - \frac{2}{3} = -2y + 1$ 	$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+2}{-2}$ 

Comentado [JRV1]:

**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.****FICHA 2: Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales**

**Definición:** Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es una expresión algebraica de la

forma  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  donde  $a, b, c, a', b', c'$  son números reales. Los números  $a, b, a'$  y  $b'$  son coeficientes.

Los números  $c$  y  $c'$  son los términos independientes.

Se llama **solución** del sistema a la dupla  $(s_1, s_2)$  que hace ciertas las dos ecuaciones simultáneamente.

**Ejemplo:** Dado el sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$ , el par  $(1, 2)$  es una solución del sistema

porque se cumple que:  $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 = 4 \\ 1 - 3 \cdot 2 = -5 \end{cases}$ .

Los SEL se clasifican según el número de soluciones que tienen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Compatible} \\ \text{Incompatible} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Determinado (una única solución)} \\ \text{Indeterminado (infinitas soluciones)} \\ \text{no tiene solución} \end{array}$$

**Criterio:**

- Si  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$  S.C.D
- Si  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow$  S.C.I
- Si  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$  S.I

1. Clasifica los siguientes sistemas según sean compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 4x + 6y = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 6x + 3y = 30 \end{cases}$$

2. Calcula el valor de "p" para que sean incompatibles los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10x + py = 3 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ px + 2y = 5 \end{cases}$$

3. Halla p y q en cada sistema de modo que sean compatibles indeterminados:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 15 \\ px - 2y = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 18 \\ px + y = q \end{cases}$$

4. Considera el sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ px - 3y = q \end{cases}$ :

a. Determina los valores de  $p$  y  $q$  para los que el sistema es compatible indeterminado.

b. Sin tener en cuenta el valor de  $q$ , ¿para qué valores de  $p$  el sistema es compatible determinado?

5. Halla  $p$ ,  $q$  y  $r$ , para que el siguiente sistema sea compatible indeterminado y una de sus soluciones sea

$$x = 1, y = 1: \begin{cases} 3x + 4y = p \\ 9x + qy = r \end{cases}$$

6. Añade a cada una de las siguientes ecuaciones lineales otra ecuación tal que los sistemas resultantes sean compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles:

$$\begin{array}{l|l} x + y = 3 & 2x - y = -4 \\ 2x + 3y = 1 & 5x - 3y = 2 \end{array}$$

7. Encuentra una ecuación lineal en la que el coeficiente de  $x$  sea 7, de modo que forme un sistema compatible indeterminado con  $3x - 6y = 12$ .

8. Considera la ecuación lineal  $3x + 2y = 1$ :

a. Comprueba que los pares de números  $(1, -1)$ ,  $(-1, 2)$  son soluciones de la ecuación.

b. Determina otra ecuación que forme con la anterior un sistema de ecuaciones lineales cuya única solución sea  $x = 1, y = -1$ .

c. Encuentra otra ecuación tal que el sistema formado por la primera tenga como soluciones los pares de números  $(1, -1)$  y  $(-1, 2)$

**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.**

**FICHA 3: Interpretación geométrica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método **GRÁFICO**, seguiremos los siguientes pasos:

**Paso 1:** Despejamos la incógnita “y” en las dos ecuaciones.

**Paso 2:** Construimos una tabla de valores para cada función.

**Paso 3:** Representamos las dos funciones en los mismos ejes de coordenadas.

**Paso 4:** El punto donde se cortan las dos rectas es la solución del sistema.

**Ejemplo:**

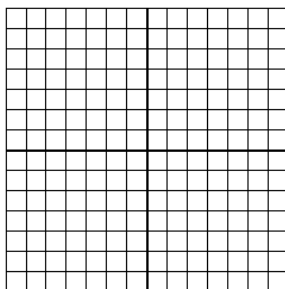
$y = 2x$	
x	y
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

$y = 3 - x$	
x	y
-2	5
-1	4
0	3
1	2
2	1

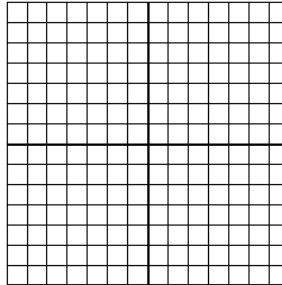
**La solución es el punto donde se cortan en este caso  $x = 1, y = 2$ .**

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método gráfico:

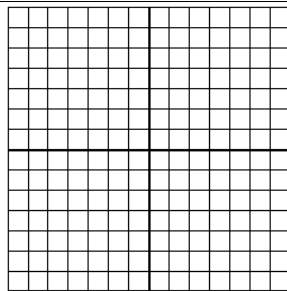
$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$$



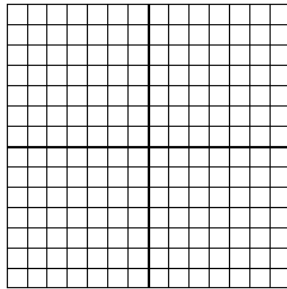
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$



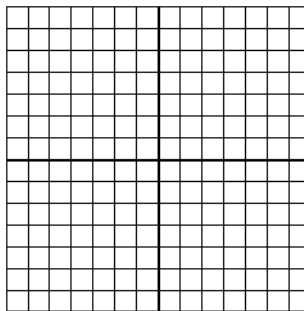
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ -2x - y = -6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$$



**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.****FICHA 4: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por sustitución.**

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de **SUSTITUCIÓN**, seguiremos los siguientes pasos:

**PASO 1:** Se despeja una incógnita en la ecuación que queramos

**PASO 2:** Se sustituye en la otra ecuación y se hacen las operaciones hasta que quede una ecuación

**PASO 3:** Se resuelve la ecuación

**PASO 4:** El valor obtenido se sustituye la expresión obtenida en el paso 1

**PASO 5:** Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema

**EJEMPLO**

$$\begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-5 + 3y}{2} \Rightarrow 7 \cdot \frac{-5 + 3y}{2} - 5y = 10$$

$$\frac{-35 + 21y}{2} - \frac{10}{2} = \frac{20}{2} \Rightarrow -35 + 21y - 10y = 20 \Rightarrow 21y - 10y = 35 + 20$$

$$\Rightarrow 11y = 55 \Rightarrow y = \frac{55}{11} = 5$$

$$x = \frac{-5 + 3y}{2} \Rightarrow x = \frac{-5 + 3 \cdot 5}{2} = \frac{-5 + 15}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

La solución del sistema es:  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución siguiendo los pasos del ejemplo

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ \frac{3}{4}x + y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 20 - x \\ 2x + 3(20 - x) = 52 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 4x + 3(y - 1) = 5 \\ 3(y - 1) = 2x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x+5-y) + 3x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{2} + \frac{y-3}{3} = \frac{11}{6} \\ -\frac{2x}{5} + \frac{y-1}{10} = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6}x + \frac{3}{7}y = 2 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y}{4} + \frac{x+y}{2} = 3 \\ \frac{12x-7y}{13} = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x + \frac{y-2}{5} = 21 \\ 4x - \frac{x+4}{6} = 29 \end{array} \right\}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.****FICHA 5: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por igualación.**

Para resolver un S.E.L. por el método de **IGUALACIÓN**, seguiremos los siguientes pasos:

**PASO 1:** Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

**PASO 2:** Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

**PASO 3:** Se resuelve la ecuación.

**PASO 4:** El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

**Ejemplo:**

$$\begin{cases} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 10 + 5y \\ x = -5 + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10 + 5y}{7} \\ x = \frac{-5 + 3y}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{10 + 5y}{7} = \frac{-5 + 3y}{2}$$

$$\frac{20 + 10y}{14} = \frac{-35 + 21y}{14}$$

$$20 + 10y = -35 + 21y$$

$$20 + 35 = 21y - 10y$$

$$55 = 11y \Rightarrow \frac{55}{11} = y \Rightarrow y = 5$$

$$x = \frac{10 + 5y}{7} = \frac{10 + 5 \cdot 5}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

**PASO 5:** La solución del sistema es:  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución siguiendo los pasos del ejemplo

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ \frac{3}{4}x + y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 20 - x \\ 2x + 3(20 - x) = 52 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 4x + 3(y - 1) = 5 \\ 3(y - 1) = 2x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x+5-y) + 3x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{2} + \frac{y-3}{3} = \frac{11}{6} \\ -\frac{2x}{5} + \frac{y-1}{10} = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6}x + \frac{3}{7}y = 2 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y}{4} + \frac{x+y}{2} = 3 \\ \frac{12x-7y}{13} = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x + \frac{y-2}{5} = 21 \\ 4x - \frac{x+4}{6} = 29 \end{array} \right\}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.****FICHA 6: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales por Reducción.**

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de REDUCCIÓN, seguimos los siguientes pasos:

**Paso 1:** Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

**Paso 2:** La restamos, y desaparece una de las incógnitas.

**Paso 3:** Se resuelve la ecuación resultante.

**Paso 4:** El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

**Paso 5:** Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

**Ejemplo:**

$$\left. \begin{array}{l} 7x - 5y = 10 \\ 2x - 3y = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cdot 2 \quad 14x - 10y = 20 \\ \cdot (-7) \quad -14x + 21y = 35 \end{array} \right\} \text{ Sumamos las dos ecuaciones}$$

$$0x + 11y = 55 \Rightarrow y = \frac{55}{11} = 5$$

$$\begin{array}{l} 7x - 5y = 10 \\ 7x - 5 \cdot 5 = 10 \\ 7x - 25 = 10 \\ 7x = 10 + 25 \\ x = \frac{35}{7} = 5 \end{array}$$

**PASO 5:** La solución del sistema es:  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución siguiendo los pasos del ejemplo

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ \frac{3}{4}x + y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 20 - x \\ 2x + 3(20 - x) = 52 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 4x + 3(y - 1) = 5 \\ 3(y - 1) = 2x - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x + 5 - y) + 3x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{2} + \frac{y-3}{3} = \frac{11}{6} \\ -\frac{2x}{5} + \frac{y-1}{10} = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6}x + \frac{3}{7}y = 2 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y}{4} + \frac{x+y}{2} = 3 \\ \frac{12x-7y}{13} = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x + \frac{y-2}{5} = 21 \\ 4x - \frac{x+4}{6} = 29 \end{array} \right\}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.****FICHA 7: Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales no inmediatos.**

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones indicando los pasos hasta llegar a un sistema sencillo y resuélvelo por el método que desees:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 7 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 = 5y \\ 2(x - 3y) + x = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3(y + 2) = 4 \\ 5(x - 1) + 2y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(2-x)+4(y+2)=0 \\ \frac{3x}{4}-\frac{2y-1}{2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(2x-y)+2x=3(x-2)+9 \\ 4(x-1)+y=2(2y-1)-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(1-x)=5(2x-y)-5 \\ \frac{x-y}{3}=\frac{x-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(-2x+y) = 4(2y-2) \\ \frac{2x-1}{3} - \frac{3y-2}{4} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3x+y) + x = 6(x+1) + 4 \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 3x - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x-1) = 2(y+6) - 3 \\ 3(2x-1) + 4 = \frac{3y-3}{3} + 16 \end{cases}$$

**UNIDAD DIDÁCTICA 8: SISTEMAS DE ECUACIONES.****FICHA 8: Problemas variados.****PASOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE SISTEMAS**

**Ejemplo .. Alejandra tiene 27 años más que su hija Carmen. Dentro de 8 años, la edad de Alejandra doblará a la de Carmen. ¿Cuántos años tiene cada una?**

**Solución.** En este problema indicaremos con detalle las 4 fases

**1º. Comprender el problema.**

Es un problema con dos incógnitas y dos condiciones, luego suficientes para poder determinarlas.

Llamamos  $x$  a la edad de Alejandra e  $y$  a la de su hija.

Ordenamos los elementos del problema:

	Hoy	dentro de 8 años
<i>La madre</i>	$x$	$x + 8$
<i>La hija</i>	$y$	$y + 8$

**2º. Concebir un plan.**

Escribimos las ecuaciones que relacionan los datos con las incógnitas:

$$x = 27 + y$$

$$x + 8 = 2(y + 8)$$

Es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Lo resolveremos por el método de sustitución.

**3º Ejecutar el plan.**

$$x = 27 + y$$

Entonces:

$$27 + y + 8 = 2(y + 8) \text{ de donde } 35 - 16 = y \Rightarrow y = 19, x = 46$$

**4º Examinar la solución obtenida. La solución obtenida es factible por ser entera.**

1. La suma de dos números es 66 y su diferencia es 8. ¿Cuáles son esos números?















